# Ejercicios Temas 2–3

Estimación puntual: sesgo, varianza y ECM; eficiencia, CCR e información de Fisher; suficiencia e invarianza

Rabadán-Pérez, F. Ibar-Alonso, R. Muñoz-Céspedes, E.

15-02-2026

# 1. Bloque A. Conceptos básicos de estimación puntual

En los ejercicios del **Tema 1** el objetivo era traducir un enunciado económico a una **probabilidad** y resolverla con la distribución/tipificación apropiada y las **tablas oficiales en cola derecha**. Aquí el objetivo es distinto: antes de calcular nada, necesitamos **definir qué estamos estimando** y **con qué regla**.

En estimación puntual trabajamos con cuatro piezas que conviene separar desde el principio: - **Parámetro** ($\theta$): valor fijo desconocido de la población (por ejemplo $\mu$, $\pi$, $\sigma^2$).
- **Estimador** ($\hat{\theta}$): regla o fórmula basada en la muestra para aproximar $\theta$ (es una **variable aleatoria**, porque depende de los datos).
- **Estimación**: el valor numérico que toma $\hat{\theta}$ cuando sustituimos por los datos observados.
- **Error de estimación**: $\hat{\theta} - \theta$. Mide la diferencia entre lo que estimamos y el valor real del parámetro.

El punto clave es que **el error no se observa directamente**, porque $\theta$ es desconocido. Por eso, en lugar de intentar "medir el error", analizamos el comportamiento de $\hat{\theta}$ si repitiésemos el muestreo muchas veces: **sesgo**, **varianza** y, como medida global, el **error cuadrático medio (ECM)**.

## 1.1. Ejercicio 1. Identificación de $\theta$, $\hat{\theta}$, estimación y error

Una empresa de *e-commerce* quiere controlar el **coste medio real de envío** (en euros) de todos los pedidos que gestiona en una semana. Llamemos $\mu$ a ese coste medio poblacional.

Para aproximarlo, el departamento de operaciones selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 8$ y registra los costes de envío (en €):

$$x_1 = 4{,}20,\ x_2 = 3{,}90,\ x_3 = 4{,}50,\ x_4 = 4{,}10,\ x_5 = 4{,}80,\ x_6 = 3{,}70,\ x_7 = 4{,}30,\ x_8 = 4{,}60.$$

Se propone como regla de estimación la **media muestral**:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

1) Identifica con claridad:
   - el **parámetro** $\theta$,
   - el **estimador** $\hat{\theta}$ (como variable aleatoria),
   - la **estimación** (valor numérico al sustituir por los datos),
   - el **error de estimación** $\hat{\theta} - \theta$.
2) Escribe explícitamente (en una única expresión) el **error** $\hat{\mu} - \mu$ para este caso.

### 1.1.1. Solución

**1) Identificación de conceptos**

- **Parámetro**: $\theta = \mu$, el coste medio poblacional (semanal) de envío en euros.

- **Estimador**: $\hat{\theta} = \hat{\mu} = \bar{X} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
  Es una **variable aleatoria**, porque depende de la muestra $(X_1, \ldots, X_n)$.
- **Estimación (valor numérico con los datos)**:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{8}(4{,}20 + 3{,}90 + 4{,}50 + 4{,}10 + 4{,}80 + 3{,}70 + 4{,}30 + 4{,}60) = \frac{34{,}10}{8} = 4{,}2625 \text{ €}.$$

- **Error de estimación**: $\hat{\theta} - \theta = \hat{\mu} - \mu = \bar{x} - \mu$.

**2) Error en este caso**

$$\hat{\mu} - \mu = \bar{x} - \mu \quad \text{y, al sustituir por la muestra,} \quad \bar{x} - \mu = 4{,}2625 - \mu.$$

### 1.1.2. Resultado final

$$\boxed{\theta = \mu, \;\; \hat{\theta} = \bar{x}, \;\; \bar{x} = 4{,}2625 \text{ €}, \;\; \hat{\mu} - \mu = \bar{x} - \mu \text{ (y } \bar{x} - \mu = 4{,}2625 - \mu).}$$

## 1.2. Ejercicio 2. Error no observable y criterios de calidad

En un informe interno de una empresa, se utiliza un estimador $\hat{\theta}$ para aproximar un parámetro desconocido $\theta$ (por ejemplo, un coste medio $\mu$ o una proporción $\pi$). Se define el **error de estimación** como $\hat{\theta} - \theta$.

1) Explica brevemente por qué **no podemos calcular directamente** el error $\hat{\theta} - \theta$ en una situación real.
2) Indica qué tres magnitudes se emplean para evaluar la **calidad** de un estimador cuando no se puede observar el error, y escribe sus expresiones:
   - **Sesgo**,
   - **Varianza**,
   - **Error cuadrático medio (ECM)**.

### 1.2.1. Solución

**1) Por qué no podemos calcular directamente el error $\hat{\theta} - \theta$**

En una aplicación real $\theta$ es un **parámetro poblacional desconocido** (por ejemplo, $\mu$ o $\pi$).
Aunque podemos calcular $\hat{\theta}$ con los datos de la muestra, **no conocemos el valor verdadero de** $\theta$ y, por tanto, el error $\hat{\theta} - \theta$ **no es observable**.

**2) Qué medimos para evaluar la calidad de $\hat{\theta}$**

Como el error no se puede observar, evaluamos el estimador por su comportamiento en muestreos repetidos:

- **Sesgo**:
$$\text{Sesgo}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta.$$
- **Varianza**:
$$V(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2\right].$$
- **Error cuadrático medio (ECM)**:
$$ECM(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] = V(\hat{\theta}) + \left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)^2.$$

### 1.2.2. Resultado final

$$\boxed{\text{El error } \hat{\theta} - \theta \text{ no se observa porque } \theta \text{ es desconocido; por eso se usan sesgo, varianza y } ECM.}$$

# 2. Bloque B. Sesgo, varianza y error cuadrático medio (ECM)

En el Bloque A hemos separado con claridad **parámetro** ($\theta$), **estimador** ($\hat{\theta}$) y **estimación** (valor numérico). El siguiente paso es evaluar si una regla de estimación es "buena".

Como el **error** $\hat{\theta}-\theta$ no se observa (porque $\theta$ es desconocido), medimos la calidad de $\hat{\theta}$ mediante tres magnitudes:

- **Sesgo**: $E(\hat{\theta}) - \theta$, que indica si el estimador tiende a sobreestimar o infraestimar.
- **Varianza**: $V(\hat{\theta})$, que mide la dispersión de $\hat{\theta}$ entre muestras.
- **Error cuadrático medio (ECM)**:

$$ECM(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] = V(\hat{\theta}) + \left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)^2.$$

El ECM es especialmente útil porque combina **precisión** (varianza baja) y **exactitud** (sesgo bajo). En estos ejercicios trabajaremos con situaciones típicas de examen: calcular sesgo y ECM, comparar dos estimadores y entender por qué un estimador puede ser **sesgado** para muestras finitas y, aun así, mejorar al aumentar el tamaño muestral.

## 2.1. Ejercicio 3. Cálculo directo de sesgo y ECM

Para una sesión bursátil, una mesa de análisis estima el **precio medio real** de un título (en €) mediante un estimador $\hat{\mu}$. El parámetro de interés es $\mu$, el precio medio poblacional (desconocido).

A partir de simulaciones internas del método de estimación, se dispone de la siguiente información teórica:

$$E(\hat{\mu}) = \mu + 0{,}20, \qquad V(\hat{\mu}) = 0{,}09.$$

1) Calcula el **sesgo** de $\hat{\mu}$ y el **sesgo**$^2$.
2) Calcula el **error cuadrático medio (ECM)** de $\hat{\mu}$.
3) Interpreta en una frase qué significa el signo del sesgo en este contexto.

### 2.1.1. Solución

**1) Sesgo y sesgo$^2$**

$$\text{Sesgo}(\hat{\mu}) = E(\hat{\mu}) - \mu = (\mu + 0{,}20) - \mu = 0{,}20.$$
$$\text{Sesgo}(\hat{\mu})^2 = (0{,}20)^2 = 0{,}04.$$

**2) ECM**

$$ECM(\hat{\mu}) = V(\hat{\mu}) + \text{Sesgo}(\hat{\mu})^2 = 0{,}09 + 0{,}04 = 0{,}13.$$

**3) Interpretación económica (mínima)**

Como el sesgo es positivo, $\hat{\mu}$ **tiende a sobreestimar** el precio medio real $\mu$ en promedio.

### 2.1.2. Resultado final

$$\boxed{\text{Sesgo}(\hat{\mu}) = 0{,}20, \quad \text{Sesgo}(\hat{\mu})^2 = 0{,}04, \quad ECM(\hat{\mu}) = 0{,}13.}$$

## 2.2. Ejercicio 4. Comparación por ECM (trade-off sesgo–varianza)

Una consultora estima el **incremento medio de ventas** (en miles de euros) asociado a una campaña publicitaria. El parámetro de interés es $\theta$, el incremento medio real (desconocido). Se están comparando dos métodos de estimación, que producen los estimadores $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$.

A partir de análisis previos del rendimiento de cada método, se conoce:

$$E(\hat{\theta}_1) = \theta + 0{,}10, \qquad V(\hat{\theta}_1) = 0{,}04,$$
$$E(\hat{\theta}_2) = \theta - 0{,}20, \qquad V(\hat{\theta}_2) = 0{,}01.$$

1) Calcula el **sesgo** y el **ECM** de $\hat{\theta}_1$.
2) Calcula el **sesgo** y el **ECM** de $\hat{\theta}_2$.
3) ¿Qué método elegirías si el criterio es minimizar el ECM? Justifica con una comparación numérica.

#### 2.2.1. Solución

**1) Para $\hat{\theta}_1$**

Sesgo:
$$\text{Sesgo}(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_1) - \theta = (\theta + 0{,}10) - \theta = 0{,}10.$$
ECM:
$$ECM(\hat{\theta}_1) = V(\hat{\theta}_1) + \text{Sesgo}(\hat{\theta}_1)^2 = 0{,}04 + (0{,}10)^2 = 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}05.$$

**2) Para $\hat{\theta}_2$**

Sesgo:
$$\text{Sesgo}(\hat{\theta}_2) = E(\hat{\theta}_2) - \theta = (\theta - 0{,}20) - \theta = -0{,}20.$$
ECM:
$$ECM(\hat{\theta}_2) = V(\hat{\theta}_2) + \text{Sesgo}(\hat{\theta}_2)^2 = 0{,}01 + (-0{,}20)^2 = 0{,}01 + 0{,}04 = 0{,}05.$$

**3) Elección por ECM**

Como $ECM(\hat{\theta}_1) = ECM(\hat{\theta}_2) = 0{,}05$, ambos métodos son **equivalentes según el ECM**.
Si hubiera que decidir por un criterio secundario, $\hat{\theta}_2$ tiene **menor varianza** pero mayor sesgo en valor absoluto.

#### 2.2.2. Resultado final

$$\boxed{ECM(\hat{\theta}_1) = 0{,}05, \quad ECM(\hat{\theta}_2) = 0{,}05 \;\Rightarrow\; \text{empate por ECM.}}$$

### 2.3. Ejercicio 5. Estimador sesgado pero consistente

Una empresa quiere estimar el **coste medio real** (en euros) de un determinado servicio. El parámetro de interés es $\theta$. Para cada tamaño muestral $n$, se propone un estimador $\hat{\theta}_n$ cuyo comportamiento teórico viene dado por:

$$E(\hat{\theta}_n) = \theta + \frac{2}{n}, \qquad V(\hat{\theta}_n) = \frac{9}{n}.$$

1) Calcula el **sesgo** de $\hat{\theta}_n$ y explica si el estimador es insesgado para un $n$ finito.
2) Calcula el **ECM** de $\hat{\theta}_n$ en función de $n$.
3) Determina si $\hat{\theta}_n$ es **consistente** (en el sentido de que el error tiende a cero cuando $n \to \infty$). Justifica usando el ECM.

#### 2.3.1. Solución

**1) Sesgo**

$$\text{Sesgo}(\hat{\theta}_n) = E(\hat{\theta}_n) - \theta = \left(\theta + \frac{2}{n}\right) - \theta = \frac{2}{n}.$$

Para cualquier $n$ finito, $\frac{2}{n} \neq 0$, luego $\hat{\theta}_n$ es **sesgado** (no es insesgado en muestras finitas).

**2) ECM**

Primero, el sesgo$^2$ es:

$$\text{Sesgo}(\hat{\theta}_n)^2 = \left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{4}{n^2}.$$

Por tanto,

$$ECM(\hat{\theta}_n) = V(\hat{\theta}_n) + \text{Sesgo}(\hat{\theta}_n)^2 = \frac{9}{n} + \frac{4}{n^2}.$$

**3) Consistencia**
Cuando $n \to \infty$,

$$ECM(\hat{\theta}_n) = \frac{9}{n} + \frac{4}{n^2} \longrightarrow 0.$$

Como el ECM tiende a cero al crecer $n$, el estimador $\hat{\theta}_n$ es **consistente**.

### 2.3.2. Resultado final

$$\boxed{\text{Sesgo}(\hat{\theta}_n) = \frac{2}{n} \neq 0 \text{ (sesgado finito)}, \quad ECM(\hat{\theta}_n) = \frac{9}{n} + \frac{4}{n^2} \to 0 \;\Rightarrow\; \hat{\theta}_n \text{ consistente.}}$$

# 3. Bloque C. Insesgadez, consistencia y eficiencia

En el Bloque B hemos visto que el **ECM** resume en una sola cantidad dos ideas distintas: *exactitud* (sesgo bajo) y *precisión* (varianza baja). En este bloque trabajamos tres propiedades clásicas que se usan para describir y comparar estimadores de forma sistemática:

- **Insesgadez**: un estimador $\hat{\theta}$ es insesgado si, en promedio, acierta el parámetro:

  $$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

  Si $E(\hat{\theta}) \neq \theta$, diremos que es sesgado.
- **Consistencia**: un estimador $\hat{\theta}_n$ es consistente si, al aumentar el tamaño muestral, se aproxima a $\theta$. En la práctica, lo interpretaremos como que el error se vuelve pequeño cuando $n$ es grande (por ejemplo, porque el sesgo y la varianza se hacen pequeños).
- **Eficiencia (entre insesgados)**: si dos estimadores son insesgados para el mismo parámetro, diremos que el más eficiente es el que tiene **menor varianza**, ya que produce estimaciones más concentradas alrededor de $\theta$.

En los siguientes ejercicios practicaremos la identificación de estas propiedades a partir de la información teórica disponible sobre cada estimador (por ejemplo, sus valores esperados y varianzas, o su comportamiento cuando $n$ crece) y realizaremos comparaciones con criterios bien definidos.

## 3.1. Ejercicio 6. Insesgadez: decidir y justificar

Una empresa analiza la **tasa de conversión real** $\pi$ (probabilidad de que una visita a la web termine en compra). Para una muestra aleatoria simple de $n$ visitas, definimos:

- $x_i = \begin{cases} 1, & \text{si la visita } i \text{ termina en compra} \\ 0, & \text{si no termina en compra} \end{cases}$,
- $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ (proporción muestral observada).

Se proponen tres estimadores del parámetro $\pi$:

$$\hat{\pi}_1 = \bar{x}, \qquad \hat{\pi}_2 = \frac{n}{n+1}\,\bar{x}, \qquad \hat{\pi}_3 = \bar{x} + 0{,}02.$$

Sabiendo que $E(\bar{X}) = \pi$, decide para cada uno si es **insesgado** o **sesgado** y justifica con el cálculo de $E(\hat{\pi}_j)$.

#### 3.1.1. Solución

Usamos la linealidad de la esperanza y el dato $E(\bar{x}) = \pi$.

**1) Estimador** $\hat{\pi}_1 = \bar{x}$

$$E(\hat{\pi}_1) = E(\bar{x}) = \pi \;\Rightarrow\; \hat{\pi}_1 \text{ es insesgado.}$$

**2) Estimador** $\hat{\pi}_2 = \dfrac{n}{n+1}\bar{x}$

$$E(\hat{\pi}_2) = E\left(\frac{n}{n+1}\bar{x}\right) = \frac{n}{n+1}E(\bar{x}) = \frac{n}{n+1}\pi \neq \pi \;\Rightarrow\; \hat{\pi}_2 \text{ es sesgado.}$$

El sesgo es:

$$E(\hat{\pi}_2) - \pi = \left(\frac{n}{n+1} - 1\right)\pi = -\frac{1}{n+1}\pi.$$

**3) Estimador** $\hat{\pi}_3 = \bar{x} + 0{,}02$

$$E(\hat{\pi}_3) = E(\bar{x}) + 0{,}02 = \pi + 0{,}02 \neq \pi \;\Rightarrow\; \hat{\pi}_3 \text{ es sesgado.}$$

El sesgo es 0,02 (positivo).

#### 3.1.2. Resultado final

$$\boxed{\hat{\pi}_1 \text{ insesgado,} \quad \hat{\pi}_2 \text{ sesgado,} \quad \hat{\pi}_3 \text{ sesgado.}}$$

### 3.2. Ejercicio 7. Consistencia: decidir con límites

Una empresa quiere estimar la **proporción real** $\pi$ de clientes que activan una suscripción premium tras una promoción. Para un tamaño muestral $n$, se plantea un estimador $\hat{\pi}_n$ cuyo comportamiento teórico es:

$$E(\hat{\pi}_n) = \pi + \frac{1}{n}, \qquad V(\hat{\pi}_n) = \frac{\pi(1-\pi)}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

1) Decide si $\hat{\pi}_n$ es **insesgado** para un $n$ finito.
2) Decide si $\hat{\pi}_n$ es **consistente** cuando $n \to \infty$. Justifica en 2–3 líneas usando el comportamiento del sesgo y de la varianza.

#### 3.2.1. Solución

**1) Insesgadez (para $n$ finito)**

$$E(\hat{\pi}_n) - \pi = \left(\pi + \frac{1}{n}\right) - \pi = \frac{1}{n} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\pi}_n \text{ es sesgado para } n \text{ finito.}$$

**2) Consistencia**

Cuando $n \to \infty$, el sesgo tiende a cero:

$$E(\hat{\pi}_n) - \pi = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Además, la varianza también tiende a cero:

$$V(\hat{\pi}_n) = \frac{\pi(1-\pi)}{n} + \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0.$$

Por tanto, al crecer $n$ el estimador se concentra alrededor de $\pi$ y $\hat{\pi}_n$ es **consistente**.

#### 3.2.2. Resultado final

$$\boxed{\hat{\pi}_n \text{ es sesgado para } n \text{ finito, pero es consistente cuando } n \to \infty.}$$

## 3.3. Ejercicio 8. Eficiencia entre insesgados (comparación por varianza)

Una consultora estima el **incremento medio real de productividad** $\theta$ (en puntos porcentuales) tras implantar un nuevo software de gestión. Se han propuesto dos estimadores insesgados $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ para el mismo parámetro $\theta$.

Se sabe que:

$$E(\hat{\theta}_1) = \theta, \qquad V(\hat{\theta}_1) = 0{,}25,$$
$$E(\hat{\theta}_2) = \theta, \qquad V(\hat{\theta}_2) = 0{,}09.$$

1) Justifica que ambos estimadores son **insesgados**.
2) Determina cuál es **más eficiente** y explica por qué.

### 3.3.1. Solución

**1) Insesgadez**

Un estimador es insesgado si $E(\hat{\theta}) = \theta$. Como

$$E(\hat{\theta}_1) = \theta \quad \text{y} \quad E(\hat{\theta}_2) = \theta,$$

ambos estimadores $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son **insesgados**.

**2) Eficiencia**

Entre estimadores insesgados del mismo parámetro, el más eficiente es el de **menor varianza**.
Como

$$V(\hat{\theta}_2) = 0{,}09 < 0{,}25 = V(\hat{\theta}_1),$$

$\hat{\theta}_2$ es **más eficiente**.

### 3.3.2. Resultado final

$$\boxed{\hat{\theta}_1 \text{ y } \hat{\theta}_2 \text{ son insesgados; el más eficiente es } \hat{\theta}_2 \text{ (menor varianza).}}$$

# 4. Bloque D. Cota de Cramér–Rao e información de Fisher

En los bloques anteriores hemos comparado estimadores mediante sesgo, varianza y ECM. En algunos modelos, además, es posible fijar un **límite teórico** a la precisión que puede alcanzar cualquier estimador **insesgado**. Ese límite se expresa mediante la **cota de Cramér–Rao (CCR)** y depende de la **información de Fisher** del modelo.

En este documento no repetimos los ejercicios conceptuales de la CCR ya trabajados en las diapositivas.

**CCR:** ver bloque C1 de las diapositivas (no se repite aquí).

## 4.1. Ejercicio 9. CCR en $B(n, \pi)$ (contexto de visitas/ventas)

Un comercial realiza $n$ visitas en una jornada. En cada visita, la probabilidad real de cerrar una venta es $\pi$ (desconocida) y se asume independencia. Sea $x$ el número de ventas conseguidas en esa jornada. Se modeliza:

$$x \sim B(n, \pi).$$

Durante $m$ jornadas comparables se observa una muestra $(x_1, \dots, x_m)$ y se estima $\pi$ mediante:

$$\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n}, \qquad \text{donde } \bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i.$$

**Dato (teoría):** para una muestra i.i.d. de tamaño $m$ en este modelo,

$$I_m(\pi) = \frac{mn}{\pi(1-\pi)}.$$

1) Calcula $V(\hat{p})$.
2) Escribe la **CCR** para la varianza de cualquier estimador insesgado de $\pi$.
3) Concluye si $\hat{p}$ es **eficiente en el sentido de la CCR**.

#### 4.1.1. Solución

**1) Varianza de $\hat{p}$**
Si $x \sim B(n, \pi)$, entonces:

$$V(x) = n\pi(1-\pi).$$

La media muestral $\bar{x}$ de $m$ jornadas independientes cumple:

$$V(\bar{x}) = \frac{V(x)}{m} = \frac{n\pi(1-\pi)}{m}.$$

Como $\hat{p} = \bar{x}/n$,

$$V(\hat{p}) = V\left(\frac{\bar{x}}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n\pi(1-\pi)}{m} = \frac{\pi(1-\pi)}{mn}.$$

**2) CCR**
La CCR para un estimador insesgado de $\pi$ es:

$$V(\hat{\pi}) \geq \frac{1}{I_m(\pi)} = \frac{\pi(1-\pi)}{mn}.$$

**3) Eficiencia (CCR)**
Como

$$V(\hat{p}) = \frac{\pi(1-\pi)}{mn} = \frac{1}{I_m(\pi)},$$

se alcanza la cota. Por tanto, $\hat{p}$ es **eficiente en el sentido de la CCR**.

#### 4.1.2. Resultado final

$$\boxed{V(\hat{p}) = \frac{\pi(1-\pi)}{mn} \quad \text{y} \quad \text{CCR} = \frac{1}{I_m(\pi)} = \frac{\pi(1-\pi)}{mn} \Rightarrow \hat{p} \text{ eficiente (CCR).}}$$

# 5. Bloque E. Suficiencia (criterio de Fisher–Neyman)

En algunos modelos, no toda la información de la muestra es necesaria para estimar un parámetro: puede existir un estadístico $T$ que "resume" toda la información relevante sobre $\theta$. A esto lo llamamos **suficiencia**. El criterio de Fisher–Neyman proporciona una forma operativa de comprobarla mediante la factorización de la verosimilitud.

En este documento no repetimos el desarrollo completo ya trabajado en las diapositivas.

**Ejemplo completo de Fisher–Neyman (Poisson):** ver diapositivas (no se repite aquí).

---

## 5.1. Ejercicio 10. CCR en Poisson ($\lambda$) (contexto de incidencias diarias)

El servicio de atención al cliente registra el número de incidencias diarias $x$. Se asume:

$$x \sim \text{Poisson}(\lambda),$$

donde $\lambda$ (desconocido) es el número medio real de incidencias al día.

Durante $n$ días, se observa una muestra $(x_1, \dots, x_n)$ (i.i.d.) y se estima $\lambda$ con:

$$\hat{\lambda} = \bar{x}, \qquad \text{donde } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

**Dato (teoría):** para una muestra i.i.d. de tamaño $n$ en este modelo,

$$I_n(\lambda) = \frac{n}{\lambda}.$$

1) Calcula $V(\hat{\lambda})$.
2) Escribe la **CCR** para la varianza de cualquier estimador insesgado de $\lambda$.
3) Concluye si $\hat{\lambda}$ es **eficiente en el sentido de la CCR**.

#### 5.1.1. Solución

**1) Varianza de $\hat{\lambda}$**
Si $x \sim \text{Poisson}(\lambda)$, entonces $V(x) = \lambda$.
La media muestral $\bar{x}$ de $n$ días independientes cumple:

$$V(\hat{\lambda}) = V(\bar{x}) = \frac{V(x)}{n} = \frac{\lambda}{n}.$$

**2) CCR**
La CCR para un estimador insesgado de $\lambda$ es:

$$V(\hat{\lambda}) \geq \frac{1}{I_n(\lambda)} = \frac{\lambda}{n}.$$

**3) Eficiencia (CCR)**
Como $V(\hat{\lambda}) = \dfrac{\lambda}{n} = \dfrac{1}{I_n(\lambda)}$, se cumple la igualdad.
Por tanto, $\hat{\lambda}$ es **eficiente en el sentido de la CCR**.

#### 5.1.2. Resultado final

$$\boxed{V(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{n} \quad \text{y} \quad \text{CCR} = \frac{1}{I_n(\lambda)} = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow \hat{\lambda} \text{ eficiente (CCR).}}$$

## 6. Bloque F. Suficiencia (criterio de Fisher–Neyman)

En algunos modelos, no toda la información de la muestra es necesaria para estimar un parámetro: puede existir un estadístico $T$ que "resume" toda la información relevante sobre $\theta$. A esto lo llamamos **suficiencia**. El criterio de Fisher–Neyman proporciona una forma operativa de comprobarla mediante la factorización de la verosimilitud.

En este documento no repetimos el desarrollo completo ya trabajado en las diapositivas.

**Ejemplo completo de Fisher–Neyman (Poisson):** ver diapositivas (no se repite aquí).

### 6.1. Ejercicio 11. Fisher–Neyman en Bernoulli $(\pi)$: suficiencia de $\sum x_i$

Una empresa analiza la **tasa real de conversión** $\pi$ (probabilidad de que una visita termine en compra). En una muestra aleatoria simple de tamaño $n$, definimos para cada visita:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si la visita } i \text{ termina en compra} \\ 0, & \text{si no termina en compra} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n.$$

Se asume que las observaciones son independientes e idénticamente distribuidas, con:

$$P(x_i = 1) = \pi, \qquad P(x_i = 0) = 1 - \pi.$$

1) Escribe la función de verosimilitud $L(\pi; x)$ para la muestra $(x_1, \dots, x_n)$.
2) Factoriza $L(\pi; x)$ para mostrar que depende de $\pi$ únicamente a través de

$$T = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

3) Concluye, por el criterio de Fisher–Neyman, que $T$ es un estadístico **suficiente** para $\pi$.

### 6.1.1. Solución

Partimos de:

$$L(\pi; x) = \prod_{i=1}^{n} \pi^{x_i} (1 - \pi)^{1 - x_i}.$$

Agrupando exponentes:

$$L(\pi; x) = \pi^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1 - \pi)^{\sum_{i=1}^{n} (1 - x_i)} = \pi^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1 - \pi)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Definimos el estadístico:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Entonces la verosimilitud puede escribirse como:

$$L(\pi; x) = g(T(x), \pi)\ h(x),$$

donde, explícitamente,

$$g(T, \pi) = \pi^{T} (1 - \pi)^{n - T}, \qquad h(x) = 1.$$

Como $h(x)$ **no depende** de $\pi$ y toda la dependencia en $\pi$ aparece a través de $T(x)$, por el criterio de Fisher–Neyman se concluye que:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{es suficiente para } \pi.$$

## 7. Invarianza del estimador

En ocasiones, el parámetro de interés no es $\theta$ directamente, sino una **transformación** $\eta = g(\theta)$ que tiene una interpretación económica más inmediata (por ejemplo, pasar de un coste medio mensual a un coste anual, o de una tasa a un ingreso esperado).

Una propiedad práctica muy utilizada es la **invarianza**: si $\hat{\theta}$ es un estimador de $\theta$, entonces una forma natural de estimar $\eta = g(\theta)$ es aplicar la misma transformación al estimador,

$$\hat{\eta} = g(\hat{\theta}).$$

En los ejercicios siguientes practicaremos esta idea con transformaciones sencillas, manteniendo la notación del curso.

## 7.1. Ejercicio 12. Invarianza (1): de media mensual a media anual

Una empresa estudia el **gasto mensual medio** en suministros de una planta industrial. El parámetro de interés es $\mu$, el gasto mensual medio real (en €). A partir de una muestra aleatoria simple, se estima $\mu$ mediante la media muestral $\bar{x}$.

Para planificación presupuestaria, interesa el **gasto anual medio**, definido como:

$$\eta = 12\,\mu.$$

1) Propón un estimador $\hat{\eta}$ de $\eta$ usando la propiedad de **invarianza** a partir del estimador $\hat{\mu} = \bar{x}$.
2) Si en una muestra concreta se obtiene $\bar{x} = 8\,250$ €, calcula la estimación numérica de $\eta$.

### 7.1.1. Solución

**1) Estimador por invarianza**

Como $\eta = 12\mu$ y $\hat{\mu} = \bar{x}$, por invarianza:

$$\hat{\eta} = 12\,\hat{\mu} = 12\,\bar{x}.$$

**2) Estimación numérica**

Sustituyendo $\bar{x} = 8\,250$:

$$\hat{\eta} = 12 \cdot 8\,250 = 99\,000 \text{ €}.$$

### 7.1.2. Resultado final

$$\boxed{\hat{\eta} = 12\,\bar{x}, \qquad \text{y si } \bar{x} = 8\,250,\ \hat{\eta} = 99\,000 \text{ €}.}$$

## 7.2. Ejercicio 13. Invarianza: estimar una varianza a partir de una desviación típica

En un proceso de producción, el parámetro de interés es la **desviación típica poblacional** $\sigma$ (en unidades del producto). Se dispone de un estimador $\hat{\sigma}$ para $\sigma$.

En ciertos informes de calidad se utiliza la **varianza**:

$$\eta = \sigma^2.$$

1) Usando la propiedad de **invarianza**, propone un estimador $\hat{\eta}$ de $\eta$ a partir de $\hat{\sigma}$.
2) Si en un estudio concreto se obtiene $\hat{\sigma} = 3{,}40$, calcula la estimación numérica de $\eta$.

### 7.2.1. Solución

**1) Estimador por invarianza**

Como $\eta = \sigma^2$ y el estimador de $\sigma$ es $\hat{\sigma}$, por invarianza:

$$\hat{\eta} = (\hat{\sigma})^2.$$

**2) Estimación numérica**

$$\hat{\eta} = (3{,}40)^2 = 11{,}56.$$

### 7.2.2. Resultado final

$$\boxed{\hat{\eta} = (\hat{\sigma})^2, \qquad \text{y si } \hat{\sigma} = 3{,}40,\ \hat{\eta} = 11{,}56.}$$

# 8. Cierre. Fórmulas mínimas (Temas 2–3)

En este tema el objetivo es evaluar y comparar estimadores cuando el **error** $\hat{\theta} - \theta$ no puede observarse (porque $\theta$ es desconocido). Las magnitudes clave son:

## 8.1. Sesgo, varianza y ECM

- **Sesgo**:
$$\text{Sesgo}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta.$$
- **Varianza**:
$$V(\hat{\theta}) = E\Big[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2\Big].$$
- **Error cuadrático medio (ECM)**:
$$ECM(\hat{\theta}) = E\Big[(\hat{\theta} - \theta)^2\Big] = V(\hat{\theta}) + \big(E(\hat{\theta}) - \theta\big)^2 = V(\hat{\theta}) + \text{Sesgo}(\hat{\theta})^2.$$
Interpretación: el ECM combina *precisión* (varianza) y *exactitud* (sesgo).

## 8.2. Insesgadez, consistencia y eficiencia

- **Insesgadez**: $\hat{\theta}$ es insesgado si
$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$
- **Consistencia (idea operativa)**: $\hat{\theta}_n$ es consistente si, cuando $n \to \infty$,
$$E(\hat{\theta}_n) \to \theta \quad \text{y} \quad V(\hat{\theta}_n) \to 0,$$
lo que implica que el estimador se concentra alrededor de $\theta$ al crecer $n$.
- **Eficiencia (entre insesgados)**: si $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son insesgados para $\theta$,
$$V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2) \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta}_1 \text{ es más eficiente.}$$

## 8.3. Información de Fisher y cota de Cramér–Rao (CCR)

Sea $L(\theta; x)$ la verosimilitud y $\ell(\theta; x) = \log L(\theta; x)$.

- **Información de Fisher (una observación)**:
$$I_1(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\,\ell(\theta; x)\right)^2\right].$$
- **Para $n$ observaciones i.i.d.**:
$$I_n(\theta) = n\,I_1(\theta).$$
- **Cota de Cramér–Rao (CCR)**: para cualquier estimador insesgado $\hat{\theta}$ que cumpla condiciones regulares,
$$V(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}.$$
Si un estimador insesgado alcanza la cota (igualdad), se dice que es **eficiente en el sentido de la CCR**.

## 8.4. Suficiencia (criterio de Fisher–Neyman)

Un estadístico $T(x)$ es **suficiente** para $\theta$ si la verosimilitud puede factorizarse como:
$$L(\theta; x) = g(T(x), \theta)\; h(x),$$

donde $h(x)$ **no depende** de $\theta$.
En ese caso, toda la dependencia de la muestra respecto a $\theta$ está "resumida" en $T(x)$.

## 8.5. Invarianza

Si el parámetro de interés es una transformación $\eta = g(\theta)$ y $\hat{\theta}$ estima $\theta$, una forma natural de estimar $\eta$ es:

$$\hat{\eta} = g(\hat{\theta}).$$