

Ejercicios Tema 4

Métodos de estimación: máxima verosimilitud (MV), momentos (MM) y mínimos cuadrados (MC)

Rabadán-Pérez, F.

Ibar-Alonso, R.

Muñoz-Céspedes, E.

15-02-2026

1. Introducción

En este documento se presentan ejercicios breves para practicar los **métodos de estimación** trabajados en el Tema 4. El objetivo es aprender a pasar de un contexto económico a una regla de estimación concreta, justificando los pasos esenciales y manteniendo una notación homogénea.

En particular, se trabajarán tres enfoques:

- **Máxima verosimilitud (MV):** construir la verosimilitud a partir del modelo probabilístico, simplificar mediante el logaritmo y obtener el estimador resolviendo la condición de óptimo.
- **Método de los momentos (MM):** igualar momentos teóricos (del modelo) con momentos muestrales y despejar el parámetro.
- **Mínimos cuadrados (MC):** elegir el parámetro que minimiza la suma de cuadrados de los errores, en problemas de ajuste sencillos.

Los ejercicios están seleccionados para cubrir la casuística más habitual en el curso (modelos Bernoulli/Binomial, Poisson y uniforme, además de ajustes por mínimos cuadrados), con enunciados contextualizados y soluciones justificadas de forma concisa.

2. Bloque A. Máxima verosimilitud (MV)

En este bloque se practica el método de **máxima verosimilitud**, que consiste en elegir el valor del parámetro θ que hace **más verosímiles** los datos observados bajo un modelo probabilístico.

El procedimiento operativo será siempre el mismo:

- 1) Plantear la **verosimilitud** $L(\theta; x)$ como producto de probabilidades (o densidades) de la muestra (x_1, \dots, x_n) .
- 2) Trabajar con la **log-verosimilitud** $\ell(\theta; x) = \log L(\theta; x)$ para simplificar.
- 3) Derivar, igualar a cero y resolver (comprobando, si procede, que se obtiene un máximo).
- 4) Interpretar el estimador en términos económicos.

Los dos ejercicios de este bloque están diseñados para que el cálculo sea manejable y el resultado final tenga una lectura directa (tasa de éxito y tasa media de eventos).

2.1. Ejercicio 1. MV en Bernoulli (π): tasa de conversión

Una empresa quiere estimar la **tasa real de conversión** π (probabilidad de que una visita termine en compra). En una muestra aleatoria simple de tamaño n , se observa para cada visita:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si la visita } i \text{ termina en compra} \\ 0, & \text{si no termina en compra} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Se asume que las observaciones son independientes e idénticamente distribuidas, con:

$$P(x_i = 1) = \pi, \quad P(x_i = 0) = 1 - \pi.$$

- 1) Construye la verosimilitud $L(\pi; x)$ para la muestra (x_1, \dots, x_n) .
- 2) Obtén la log-verosimilitud $\ell(\pi; x)$.
- 3) Deriva, iguala a cero y resuelve para obtener el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\pi}_{MV}$.

2.1.1. Solución

1) Verosimilitud

Para cada observación,

$$P(x_i; \pi) = \pi^{x_i} (1 - \pi)^{1 - x_i}.$$

Como la muestra es i.i.d.,

$$L(\pi; x) = \prod_{i=1}^n \pi^{x_i} (1 - \pi)^{1 - x_i} = \pi^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \pi)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Denotamos

$$T = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Entonces,

$$L(\pi; x) = \pi^T (1 - \pi)^{n - T}.$$

2) Log-verosimilitud

$$\ell(\pi; x) = \log L(\pi; x) = T \log(\pi) + (n - T) \log(1 - \pi).$$

3) Condición de primer orden y solución

Derivamos respecto a π :

$$\ell'(\pi) = \frac{T}{\pi} - \frac{n - T}{1 - \pi}.$$

Igualamos a cero:

$$\frac{T}{\pi} - \frac{n - T}{1 - \pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{\pi} = \frac{n - T}{1 - \pi}.$$

Cruzando:

$$T(1 - \pi) = \pi(n - T) \quad \Rightarrow \quad T - T\pi = \pi n - \pi T \quad \Rightarrow \quad T = \pi n.$$

Por tanto,

$$\hat{\pi}_{MV} = \frac{T}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}.$$

2.1.2. Resultado final

$$\hat{\pi}_{MV} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

2.2. Ejercicio 2. MV en Poisson (λ): intensidad media de incidencias

El servicio de atención al cliente registra el número de incidencias diarias x . Se asume que, para días comparables, el número de incidencias sigue un modelo Poisson con parámetro λ (desconocido):

$$x \sim \text{Poisson}(\lambda).$$

Durante n días se observa una muestra (x_1, \dots, x_n) (i.i.d.). Se pide obtener el estimador de máxima verosimilitud de λ .

- 1) Escribe la verosimilitud $L(\lambda; x)$ para la muestra.
- 2) Obtén la log-verosimilitud $\ell(\lambda; x)$.
- 3) Calcula la ecuación de score $\ell'(\lambda) = 0$ y resuelve para obtener $\hat{\lambda}_{MV}$.

2.2.1. Solución

1) Verosimilitud

Para cada observación x_i ,

$$P(x_i; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!}.$$

Como la muestra es i.i.d.,

$$L(\lambda; x) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!}.$$

Denotamos

$$T = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Entonces,

$$L(\lambda; x) = e^{-n\lambda} \lambda^T \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!}.$$

2) Log-verosimilitud

$$\ell(\lambda; x) = \log L(\lambda; x) = -n\lambda + T \log(\lambda) - \sum_{i=1}^n \log(x_i!).$$

3) Score y solución

Derivamos respecto a λ :

$$\ell'(\lambda) = -n + \frac{T}{\lambda}.$$

Igualamos a cero:

$$-n + \frac{T}{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{\lambda} = n \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda}_{MV} = \frac{T}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}.$$

2.2.2. Resultado final

$$\hat{\lambda}_{MV} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

3. Bloque B. Invarianza del estimador MV

En muchos casos, una vez obtenido el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}_{MV}$, el parámetro de interés no es θ directamente, sino una transformación con interpretación económica más clara, $\eta = g(\theta)$.

Una propiedad especialmente útil es la **invarianza del MV**: si $\hat{\theta}_{MV}$ maximiza la verosimilitud para θ , entonces el estimador de máxima verosimilitud de $\eta = g(\theta)$ se obtiene aplicando la misma transformación:

$$\hat{\eta}_{MV} = g(\hat{\theta}_{MV}).$$

En este bloque se practica esta idea sin rehacer verosimilitudes.

3.1. Ejercicio 3. Invarianza del MV: de incidencias diarias a incidencias semanales

El servicio de atención al cliente modeliza el número de incidencias diarias como $\text{Poisson}(\lambda)$, donde λ es el **número medio real de incidencias al día**. A partir de n días, se ha obtenido por máxima verosimilitud:

$$\hat{\lambda}_{MV} = \bar{x}.$$

Para planificación de recursos, interesa el **número medio de incidencias por semana**, definido como:

$$\eta = 7\lambda.$$

- 1) Utilizando la **invarianza del MV**, propone el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\eta}_{MV}$.
- 2) Si en una muestra concreta se obtiene $\bar{x} = 18,4$ incidencias/día, calcula la estimación de η (incidencias/semana).

3.1.1. Solución

1) Estimador por invarianza

Como $\eta = 7\lambda$ y $\hat{\lambda}_{MV} = \bar{x}$, por invarianza:

$$\hat{\eta}_{MV} = 7\hat{\lambda}_{MV} = 7\bar{x}.$$

2) Estimación numérica

$$\hat{\eta}_{MV} = 7 \cdot 18,4 = 128,8 \text{ incidencias/semana.}$$

3.1.2. Resultado final

$\hat{\eta}_{MV} = 7\bar{x}, \quad \text{y si } \bar{x} = 18,4, \quad \hat{\eta}_{MV} = 128,8 \text{ incidencias/semana.}$
--

4. Bloque C. Método de los momentos (MM)

El **método de los momentos** (MM) estima los parámetros del modelo igualando **momentos teóricos** (calculados con la distribución) con **momentos muestrales** (calculados con los datos). La idea básica es:

$$\text{momento teórico} = \text{momento muestral.}$$

En este bloque aplicaremos el procedimiento en modelos sencillos. En algunos casos, el estimador por MM coincide con el de MV, lo que permite comparar métodos sin añadir complejidad.

4.1. Ejercicio 4. MM en Poisson (λ): intensidad media de incidencias

Se modeliza el número de incidencias diarias x como:

$$x \sim \text{Poisson}(\lambda),$$

donde λ (desconocido) es el número medio real de incidencias al día.

Durante n días se observa una muestra (x_1, \dots, x_n) .

- 1) Aplica el **método de los momentos** para proponer un estimador $\hat{\lambda}_{MM}$ de λ .
- 2) Indica (sin demostrar) si $\hat{\lambda}_{MM}$ coincide o no con el estimador de máxima verosimilitud obtenido en el Bloque A.

4.1.1. Solución

En una $Poisson(\lambda)$ se cumple:

$$E(x) = \lambda.$$

El primer momento muestral es la media:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Igualando momento teórico y muestral:

$$E(x) = \lambda \approx \bar{x} \Rightarrow \hat{\lambda}_{MM} = \bar{x}.$$

Además, en el modelo Poisson el estimador de MV también es $\hat{\lambda}_{MV} = \bar{x}$, por lo que **coinciden**.

4.1.2. Resultado final

$$\hat{\lambda}_{MM} = \bar{x} \text{ y coincide con } \hat{\lambda}_{MV}.$$

4.2. Ejercicio 5. Uniforme $U(0, \theta)$: MM vs MV

Para un activo financiero, se supone que el **precio intradía** x (en €) durante un intervalo corto puede modelizarse como uniforme en $(0, \theta)$, donde $\theta > 0$ es el **máximo teórico** del rango de precios en ese intervalo:

$$x \sim U(0, \theta).$$

Se observa una muestra (x_1, \dots, x_n) y se desea estimar θ .

1) (MM) Usando que, en una $U(0, \theta)$,

$$E(x) = \frac{\theta}{2},$$

obtén el estimador por **método de los momentos** $\hat{\theta}_{MM}$.

2) (MV) Razona cuál es el estimador de **máxima verosimilitud** $\hat{\theta}_{MV}$ y exprésalo con la muestra.

4.2.1. Solución

1) Método de los momentos (MM)

El primer momento muestral es \bar{x} . Igualamos:

$$E(x) = \frac{\theta}{2} \approx \bar{x} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \bar{x} \Rightarrow \hat{\theta}_{MM} = 2\bar{x}.$$

2) Máxima verosimilitud (MV)

En $U(0, \theta)$, la densidad es:

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x < \theta.$$

Para una muestra (x_1, \dots, x_n) , la verosimilitud es proporcional a $1/\theta^n$, pero solo es positiva si $\theta \geq \max\{x_1, \dots, x_n\}$.

Para maximizar $L(\theta; x)$ conviene elegir el θ **más pequeño posible** compatible con los datos, es decir:

$$\hat{\theta}_{MV} = \max\{x_1, \dots, x_n\}.$$

4.2.2. Resultado final

$$\hat{\theta}_{MM} = 2\bar{x}, \quad \hat{\theta}_{MV} = \max\{x_1, \dots, x_n\}.$$

5. Bloque D. Mínimos cuadrados (MC)

El criterio de **mínimos cuadrados** (MC) elige el valor del parámetro que hace “pequeños” los errores entre los datos y el valor ajustado, midiendo esos errores mediante **cuadrados**. En su versión más simple, se trata de aproximar un conjunto de observaciones por una **constante** a , escogida para minimizar la siguiente función objetivo:

$$Q(a) = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$

Este enfoque aparece de forma natural cuando se quiere resumir una variable económica por un único valor “representativo” penalizando más los errores grandes.

5.1. Ejercicio 6. MC ajustando una constante: gasto mensual típico

Una empresa registra el **gasto mensual** (en €) en suministros durante n meses, obteniendo una muestra (x_1, \dots, x_n) . Se desea aproximar todos los meses por un único valor constante a (gasto “típico”) eligiendo a por mínimos cuadrados:

$$Q(a) = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$

- 1) Deriva $Q(a)$ respecto a a e impón la condición de primer orden para un mínimo.
- 2) Obtén el valor \hat{a} que minimiza $Q(a)$ y exprésalo en función de (x_1, \dots, x_n) .

5.1.1. Solución

Partimos de:

$$Q(a) = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$

Derivamos respecto a a :

$$Q'(a) = \sum_{i=1}^n 2(x_i - a)(-1) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - a).$$

Imponiendo la condición de primer orden $Q'(a) = 0$:

$$-2 \sum_{i=1}^n (x_i - a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n (x_i - a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i - na = 0.$$

De aquí:

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}.$$

(Además, $Q''(a) = 2n > 0$, por lo que se trata de un mínimo.)

5.1.2. Resultado final

$$\boxed{\hat{a} = \bar{x}.}$$

6. Bloque E. Cierre comparativo

En este bloque final se resume **cuándo** es natural aplicar cada método de estimación según el tipo de información disponible: un **modelo probabilístico** (MV), momentos teóricos sencillos (MM) o un criterio de **ajuste por error cuadrático** (MC). No se pide cálculo, solo identificar el método adecuado y justificarlo brevemente.

6.1. Ejercicio 7. Elección del método (sin cálculo)

Para cada una de las siguientes situaciones, indica qué método de estimación usarías (MV, MM o MC) y justifica en 1–2 líneas.

(a) Una empresa observa n operaciones y registra $x_i \in \{0, 1\}$, donde $x_i = 1$ si hay impago y $x_i = 0$ si no lo hay. Se asume un modelo $B(1, \pi)$ para cada operación, con π desconocido.

(b) Un call center registra el número de llamadas entrantes por hora x y asume un modelo Poisson(λ), con λ desconocido.

(c) Un departamento financiero quiere resumir una serie de gastos mensuales (x_1, \dots, x_n) por un único valor constante a que “represente” bien a los datos penalizando más los errores grandes.

6.1.1. Solución

(a) **MV** (o **MM**). Hay un modelo Bernoulli/Binomial para datos 0/1 y π es el parámetro del modelo; MV construye $L(\pi; x)$ y MM iguala $E(x) = \pi$ con \bar{x} . En este caso ambos llevan a $\hat{\pi} = \bar{x}$.

(b) **MV** o **MM**. Hay un modelo Poisson para conteos; MV maximiza $L(\lambda; x)$ y MM iguala $E(x) = \lambda$ con \bar{x} . En Poisson ambos llevan a $\hat{\lambda} = \bar{x}$.

(c) **MC**. No se está planteando un modelo probabilístico explícito, sino un criterio de ajuste: elegir a para minimizar $\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$.

6.1.2. Resultado final

(a) MV/MM, (b) MV/MM, (c) MC.
