Francisco Rabadán Pérez – Raquel Ibar Alonso – Ester Muñoz Céspedes (URJC)

Tema 5. Intervalos de confianza

Cuaderno base de ejercicios resueltos para clase y preparación del examen

Estadística II · Grado en Economía · URJC

Criterio docente
Cada ejercicio se resuelve en cuatro pasos: identificar el parámetro, elegir el método, calcular el intervalo o tamaño muestral e interpretar el resultado con lenguaje económico.

1. Guía breve para resolver ejercicios de intervalos de confianza

Estructura pensada para clase, estudio autónomo y preparación del examen.

Antes de calcular, conviene responder siempre a cuatro preguntas básicas. Si el alumno automatiza esta secuencia, la mayoría de los ejercicios del tema quedan bien encuadrados desde el principio.

- ¿Qué **parámetro** se desea estimar? Puede ser una media μ, una variabilidad σ^2 o σ, o una proporción π.
- ¿Qué **supuesto** se hace sobre la población? Normal $N(\mu,\sigma)$, distribución desconocida con información mínima, o muestra grande con aproximación.
- ¿Qué **información aporta la muestra**? Media muestral $\bar{x}$, varianza muestral S^2, cuasivarianza muestral S_1^2, proporción muestral p, tamaño n y nivel de confianza γ.
- ¿Qué **herramienta** corresponde? Z, t de Student, χ^2, aproximación normal para proporciones, o desigualdad de Chebyshev.

En todo el documento se sigue la notación del curso: S^2 es la varianza muestral con divisor n y S_1^2 es la cuasivarianza muestral con divisor $n-1$. Para proporciones se utiliza p para la proporción muestral y π para la poblacional.

Lista de contenidos del cuaderno

Bloque	Contenido	Ejercicios
Medias en población normal	I.C. para μ con σ conocida y con σ desconocida	1 a 3
Variabilidad	I.C. para σ^2 y σ	4 y 5
Poblaciones no normales	Chebyshev y grandes muestras	6 y 7
Proporciones	I.C. para π	8
Diseño muestral	Tamaño muestral para μ y π	9 a 11

Síntesis	Interpretación del I.C., unilaterales, aplicabilidad y elección del procedimiento	12 a 15

Síntesis: elección del intervalo adecuado

CORE

Caso	Parámetro	Supuesto clave	Método correcto
a)	μ	Población normal y σ conocida	I.C. para μ basado en Z
b)	μ	Población normal y σ desconocida	I.C. para μ basado en t de Student
c)	σ^2 o σ	Población normal	I.C. basado en χ^2
d)	π	Muestra grande y regla práctica válida	I.C. aproximado para π
e)	μ	Muestra grande, población no necesariamente normal	I.C. aproximado para μ
f)	μ	Distribución desconocida, sin normalidad y sin apoyo asintótico; se conoce o se controla la variabilidad	Intervalo vía desigualdad de Chebyshev
g)	μ	Se pide solo cota inferior o superior, con σ conocida y normalidad	I.C. unilateral para μ basado en Z
h)	μ	Se pide solo cota inferior o superior, con σ desconocida y normalidad	I.C. unilateral para μ basado en t
i)	π	Se pide solo cota inferior o superior y la aproximación normal es válida	I.C. unilateral aproximado para π
j)	μ	Se fija un error máximo e, un nivel γ y σ conocida	Tamaño muestral para estimar μ
k)	π	Se fija un error máximo e, un nivel γ, con información previa sobre π	Tamaño muestral para estimar π con π previa
l)	π	Se fija un error máximo e, un nivel γ, sin información previa sobre π	Tamaño muestral conservador para π, usando $\pi(1-\pi) \leq 0{,}25$

Nota: Este razonamiento debe utilizarse antes de los ejercicios como entrenamiento rápido de decisión. Si el alumno selecciona mal el método, el resto del desarrollo suele quedar arrastrado.

2. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1. I.C. para μ con σ conocida: rendimiento medio de una cartera

CORE

Una gestora quiere estimar el rendimiento medio mensual, en puntos porcentuales, de una cartera de renta variable. A partir de evidencia histórica se asume que la población de rendimientos puede modelizarse como $N(\mu, \sigma)$ con $\sigma = 1$. En una muestra aleatoria simple de n = 20 meses se obtiene una media muestral $\bar{x} = 5{,}1885$. Construir un intervalo de confianza bilateral del 90% para μ.

Parámetro	μ, rendimiento medio mensual de la cartera.
Supuesto	Población normal N(μ,σ) con σ conocida.
Datos	$\bar{x} = 5{,}1885;\ \sigma = 1;\ n = 20;\ \gamma = 0{,}90;\ \alpha = 0{,}10.$
Método	Intervalo bilateral basado en Z.

1. Como la población es N(μ,σ) y la desviación típica poblacional es conocida, procede el intervalo:

$$\mu \in \left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

2. Para γ = 0,90 se tiene$z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1{,}6449.$

3. La semi-amplitud es $1.6449 \cdot \frac{1}{\sqrt{20}} = 0{,}3678.$

4. Por tanto, el intervalo es [4,8207 ; 5,5563].

I.C. del 90% para μ: [4,8207 ; 5,5563]

Interpretación: con este procedimiento se obtienen intervalos que contienen a μ con nivel de confianza 0,90.

Interpretación económica: el rendimiento medio mensual de la cartera se sitúa razonablemente entre el 4,82% y el 5,56% en el periodo analizado.

Observación. Clave de examen: si σ es conocida y la población es normal, la pregunta clave no es "qué fórmula recuerdo", sino "por qué el pivote adecuado es Z".

Ejercicio 2. I.C. para μ con σ desconocida: tiempo medio de espera en banca digital	**CORE**

Una entidad financiera analiza el tiempo de espera, en minutos, que soportan los clientes de su servicio de atención digital antes de ser atendidos por un gestor. Se seleccionan 30 interacciones y se obtiene $\bar{x}$ = 2,0 y cuasidesviación típica muestral S_1 = 0,6. Suponiendo que la población puede considerarse normal, construir un intervalo de confianza bilateral del 99% para μ.

Parámetro	μ, tiempo medio de espera en el servicio.
Supuesto	Población normal $N(\mu, \sigma)$ con σ desconocida.
Datos	$\bar{x} = 2{,}0;\ S_1 = 0{,}6;\ n = 30;\ \gamma = 0{,}99;\ \alpha = 0{,}01.$
Método	Intervalo bilateral basado en t de Student con n−1 = 29 grados de libertad.

1. Al ser σ desconocida y suponerse normalidad, el intervalo adecuado usa t de Student:

$$\mu \in \left[\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{S_1}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{S_1}{\sqrt{n}}\right]$$

2. Para $\gamma = 0{,}99$ y $n - 1 = 29$ grados de libertad, $t_{0{,}005;29} = 2.7564$.

3. La semi-amplitud es $2.7564 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{30}} = 0.3019$.

4. El intervalo buscado es [1,6981 ; 2,3019].

I.C. del 99% para μ: [1,6981 ; 2,3019]

Es más ancho que el obtenido con Z porque la incertidumbre es mayor cuando σ es desconocida.

Interpretación económica: el tiempo medio de espera de los clientes de este servicio digital puede situarse aproximadamente entre 1,70 y 2,30 minutos.

Observación. Si el dato que te dan es S_1 o S_1^2 y la población es normal con σ desconocida, el camino natural es t de Student.

Ejercicio 3. Comparación entre Z y t con los mismos datos — CORE

Usando los datos del ejercicio anterior, compárense los intervalos del 99% que se obtendrían si la desviación típica poblacional fuese conocida (σ = 0,6) y si fuese desconocida (S_1 = 0,6).

1. Si σ fuese conocida, la semi-amplitud sería $z_{0,005} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}5758 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{30}} = 0{,}2822.$

2. El intervalo con Z sería $[1{,}7178\ ;\ 2{,}2822]$.

3. Con σ desconocida ya hemos obtenido $[1{,}6981\ ;\ 2{,}3019]$ usando $t_{0,005;29} = 2.7564.$

4. El intervalo basado en t es ligeramente más ancho porque $t_{\frac{\alpha}{2},n-1} > z_{\frac{\alpha}{2}}$.

Con Z: $[1.7178\ ;\ 2.2822]$
Con t: [1.6981 ; 2.3019]

Interpretación didáctica: este ejercicio ayuda a interiorizar que la elección del intervalo depende del conocimiento sobre σ, no de una preferencia del alumno.

Observación. Cuando dos procedimientos parecen posibles, conviene justificar en una frase por qué uno domina al otro.

Ejercicio 4. I.C. para σ^2 y σ: variabilidad del peso neto de envases — CORE

Una empresa de distribución revisa la estabilidad del peso neto de un envase de marca blanca. Se supone que los pesos siguen una distribución normal. En una muestra aleatoria simple de n = 8 envases se obtiene una varianza muestral S^2 = 37,69 g^2. Construir un intervalo de confianza bilateral del 95% para la varianza poblacional σ^2 y, a partir de él, otro para la desviación típica σ.

Parámetro	σ^2 y, por transformación, σ.
Supuesto	Población normal N(μ,σ).
Datos	$S^2 = 37{,}69;\ n = 8;\ \gamma = 0{,}95;\ \alpha = 0{,}05.$
Método	Pivote: $n \cdot \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

1. En población normal, el pivote $n \cdot S^2/\sigma^2$ sigue una χ^2 con n−1 grados de libertad.

2. El intervalo bilateral del 95% para σ^2 es:

$$[n \cdot S^2/\chi^2_{0{,}975;\,n-1}\ ;\ n \cdot S^2/\chi^2_{0{,}025;\,n-1}].$$

3. Con $n = 8, \chi^2_{0{,}975;7} = 16.0128$ y $\chi^2_{0{,}025;7} = 1.6899.$

4. Por tanto, $\sigma^2 \in [18.8300\ ;\ 178.4280]$ g^2.

5. Para obtener un intervalo para σ, se toma raíz en ambos extremos: σ ∈ [4.3394 ; 13.3577] g.

I.C. del 95% para σ^2: [18.83 ; 178.43] g^2

I.C. del 95% para σ: [4.34 ; 13.36] g

Interpretación económica: la empresa no solo quiere un nivel medio correcto de llenado; también le interesa controlar la dispersión del proceso, porque una variabilidad alta genera sobrecostes, reclamaciones o incumplimientos de calidad.

Observación. El intervalo para σ^2 no es simétrico en longitud. Al pasar a σ, la forma se mantiene asimétrica.

Ejercicio 5. I.C. para σ^2 cuando el dato suministrado es S_1^2 — PLUS

Una consultora analiza la variabilidad del gasto mensual en publicidad digital de pequeñas empresas. Se supone normalidad. En una muestra de n = 26 empresas se obtiene una cuasidesviación típica muestral S_1 = 12 cientos de euros. Construir un intervalo de confianza bilateral del 90% para σ^2 y para σ.

Parámetro	σ^2 y σ del gasto mensual.
Supuesto	Población normal N(μ,σ).
Datos	$S_1 = 12$; luego $S_1^2 = 144$; $n = 26$; $\gamma = 0{,}90$; $\alpha = 0{,}10$.
Método	Primero convertir S_1^2 en S^2: $S^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot {S_1}^2$.

1. Primero convertimos: $S^2 = \left(\frac{26-1}{26}\right) \cdot 144 = 138{,}4615.$

2. Una vez obtenida S^2, usamos el mismo pivote del ejercicio anterior: $n \cdot \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

3. Para $\gamma = 0{,}90$ y 25 grados de libertad: $\chi^2_{0{,}95;25} = 37.6525$ y $\chi^2_{0{,}05;25} = 14.6114.$

4. Así, $\sigma^2 \in [95.6112\ ;\ 246.3828]$ (cientos de euros)^2.

5. Y $\sigma \in [9.7781\ ;\ 15.6966]$ cientos de euros.

I.C. del 90% para σ^2: [95.61 ; 246.38]

I.C. del 90% para σ: [9.78 ; 15.70]

Nota docente: este tipo de ejercicio enseña a no perderse cuando el enunciado da S_1^2 o S_1 en lugar de S^2. En examen suele ser un punto delicado.

Observación. Antes de buscar tablas o cuantiles, verifica siempre qué tipo de varianza muestral te están dando.

Ejercicio 6. Intervalo para μ mediante Chebyshev — PLUS

Una empresa industrial quiere estimar el coste medio por expediente tramitado. No desea imponer un modelo paramétrico concreto a la población, pero conoce que la desviación típica poblacional es $\sigma = 18$ euros. En una muestra aleatoria simple de $n = 81$ expedientes se obtiene $\bar{x} = 240$ euros. Construir un intervalo que contenga al parámetro con probabilidad al menos $\gamma = 0{,}90$.

Parámetro	μ, coste medio por expediente.
Supuesto	Distribución desconocida; solo se supone que existen μ y σ.
Datos	$\bar{x} = 240;\ \sigma = 18;\ n = 81;\ \gamma = 0{,}90.$
Método	Desigualdad de Chebyshev aplicada a la media muestral.

1. Chebyshev permite construir un intervalo sin suponer normalidad. Para la media muestral,

$$P(|\bar{x} - \mu| < k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

2. Queremos una probabilidad al menos γ = 0,90. Por tanto, elegimos k tal que $1 - \frac{1}{k^2} = 0{,}90$.

3. De aquí se obtiene $k = \sqrt{\frac{1}{1-0{,}90}} = 3{,}1623$.

4. La semi-amplitud es $3{,}1623 \cdot \frac{18}{\sqrt{81}} = 6{,}3246$.

5. El intervalo pedido es $[233{,}6754\ ;\ 246{,}3246]$.

Intervalo con probabilidad de cobertura al menos 0,90: [233.68 ; 246.32]

Interpretación económica: este intervalo es más conservador que un I.C. normal, pero tiene la ventaja de no depender de una hipótesis fuerte sobre la forma de la distribución.

Observación. Clave de examen: en este bloque evita expresiones como “garantía mínima” y formula siempre la conclusión como “intervalo que contiene al parámetro con probabilidad al menos γ”.

Ejercicio 7. I.C. aproximado para μ en muestra grande — PLUS

Una plataforma de comercio electrónico quiere estimar el gasto medio por pedido de sus clientes. En una muestra aleatoria simple de $n = 400$ pedidos se obtiene $\bar{x} = 38{,}4$ euros y cuasidesviación típica muestral $S_1 = 12{,}5$ euros. Construir un intervalo de confianza bilateral del 95% para μ.

Parámetro	μ, gasto medio por pedido.
Supuesto	No se impone normalidad; se usa aproximación por gran tamaño muestral.
Datos	$\bar{x} = 38{,}4;\ S_1 = 12{,}5;\ n = 400;\ \gamma = 0{,}95;\ \alpha = 0{,}05.$
Método	Aproximación normal: $\mu \approx [\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S^1}{\sqrt{n}}].$

1. Como n = 400 es grande, la distribución de x̄ puede aproximarse por una normal aunque la población no lo sea.

2. En este caso se utiliza el intervalo aproximado: $\mu \approx [\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S^1}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S^1}{\sqrt{n}}].$

3. Para $\gamma = 0{,}95, z_{0{,}025} = 1.9600.$

4. La semi-amplitud es $1{,}9600 \cdot \frac{12{,}5}{\sqrt{400}} = 1{,}2250.$

5. El intervalo aproximado es [37.1750 ; 39.6250] euros.

I.C. aproximado del 95% para μ: [37,18 ; 39,62] euros

Interpretación económica: el gasto medio por pedido se sitúa aproximadamente entre 37,18 y 39,62 euros. La palabra “aproximado” no es decorativa: recuerda al alumno que aquí no se está usando un resultado exacto bajo normalidad.

Observación. Si la muestra es grande y no hay información suficiente para suponer normalidad exacta, este suele ser el camino natural para la media.

Ejercicio 8. I.C. para π: proporción de clientes con mora — CORE

Un banco quiere estimar la proporción π de clientes que presentan mora en créditos al consumo. En una muestra aleatoria simple de $n = 250$ clientes se observa que 32 están en situación de mora. Construir un intervalo de confianza bilateral del 95% para π.

Parámetro	π, proporción poblacional de clientes con mora.
Supuesto	Muestra grande; aproximación normal para la proporción.
Datos	$x = 32;\ n = 250;\ p = x/n = 0.128;\ \gamma = 0{,}95.$
Comprobación	**np = 32** y $n(1-p) = 218$, ambos suficientemente grandes.

1. Para proporciones en muestra grande se usa el intervalo aproximado:

$$\pi \in \left[p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

2. Antes de aplicarlo conviene verificar la regla práctica: np y $n(1-p)$ deben ser suficientemente grandes.

3. Con $p = 0.128$, la semi-amplitud es $1.9600 \cdot \sqrt{0.128 \cdot \frac{0.872}{250}} = 0.0414.$

4. El intervalo del 95% para π es $[0{,}0866\ ;\ 0{,}1694]$.

I.C. aproximado del 95% para π: [0,0866 ; 0,1694]

Interpretación económica: la tasa de mora de la cartera de crédito al consumo se sitúa aproximadamente entre el 8,66% y el 16,94%.

Observación. En este curso se usa p para la proporción muestral.

Ejercicio 9. Tamaño muestral para estimar μ con error máximo prefijado — CORE

Una empresa de seguros desea estimar el importe medio de los siniestros pequeños. Se asume que la desviación típica poblacional es $\sigma = 35$ euros. ¿Qué tamaño muestral mínimo debe tomarse para construir un intervalo bilateral del 95% cuya semi-amplitud no supere $e = 5$ euros?

Parámetro	μ, importe medio del siniestro.
Datos	$\sigma = 35;\ e = 5;\ \gamma = 0{,}95;\ \alpha = 0{,}05.$
Método	Tamaño muestral para la media con σ conocida: $$n = z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \frac{\sigma^2}{e^2}$$

1. La semi-amplitud del intervalo con σ conocida es $e = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma/\sqrt{n}$.

2. Despejando n se obtiene: $n = z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \frac{\sigma^2}{e^2}$.

3. Sustituyendo: $n = 1{,}9600^2 \cdot \frac{35^2}{5^2} = 188{,}2315$.

4. Como el tamaño debe ser entero y garantizar el error máximo, se redondea hacia arriba: n = 189.

Tamaño muestral mínimo: n = 189

Interpretación económica: si la empresa encuesta o revisa menos de 189 siniestros, ya no puede asegurar una semi-amplitud máxima de 5 euros con ese nivel de confianza.

Observación. Clave de examen: en tamaño muestral el redondeo siempre es hacia arriba.

Ejercicio 10. Tamaño muestral para π con información previa — CORE

Una entidad financiera estima, a partir de estudios anteriores, que la proporción de clientes que dejan de usar una tarjeta de crédito premium ronda el 8%. Se desea estimar π con un intervalo bilateral del 95% y error máximo e = 0,02. ¿Qué tamaño muestral mínimo se necesita?

Parámetro	π, proporción de clientes que abandonan el producto.
Datos	Información previa: π ≈ 0,08; e = 0,02; γ = 0,95.
Método	$n = z_{\frac{\alpha}{2}}^{2} \cdot \frac{\pi(1-\pi)}{e^2}$, sustituyendo la mejor información previa disponible.

1. Cuando hay información previa sobre la proporción, conviene usarla para el diseño muestral.

2. La fórmula es $n = z_{\frac{\alpha}{2}}^{2} \cdot \frac{\pi(1-\pi)}{e^2}$.

3. Sustituyendo: $n = 1{,}9600^2 \cdot 0{,}08 \cdot \frac{0{,}92}{0{,}02^2} = 706{,}8284$.

4. Redondeando hacia arriba, el tamaño mínimo es n = 707.

Tamaño muestral mínimo: n = 707

Interpretación económica: la información previa permite reducir el tamaño exigido frente al caso conservador sin información.

Observación. Clave de examen: no confundas este caso con el conservador de π(1−π) = 0,25.

Ejercicio 11. Tamaño muestral para π sin información previa — CORE

Una empresa de telecomunicaciones quiere estimar la proporción de clientes que se dan de baja en un trimestre. No dispone de información previa sobre π. ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para construir un intervalo bilateral del 95% con error máximo e = 0,03?

Parámetro	π, proporción de bajas trimestrales.
Datos	Sin información previa; e = 0,03; γ = 0,95.
Método	Caso conservador: $\pi(1-\pi) \leq 0{,}25$, luego $n = z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \frac{0{,}25}{e^2}$.

1. Cuando no hay información previa sobre π, se usa el caso más desfavorable $\pi(1-\pi) = 0{,}25$.

2. La fórmula de diseño se convierte en $n = z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \frac{0{,}25}{e^2}$.

3. Sustituyendo: $n = 1{,}9600^2 \cdot \frac{0{,}25}{0{,}03^2} = 1067{,}0719$.

4. Redondeando hacia arriba, resulta n = 1068.

Tamaño muestral mínimo: n = 1068

Interpretación económica: este es el tamaño más prudente cuando la empresa no sabe nada todavía sobre la tasa real de bajas.

Observación. Si el problema dice expresamente que no hay información previa, casi siempre hay que pensar en 0,25.

Ejercicio 12. Interpretación correcta de un intervalo de confianza — CORE

Retómese el intervalo del 90% para μ del ejercicio 1: [4,8207 ; 5,5563]. Señale cuál de las siguientes afirmaciones es correcta y justifique brevemente la respuesta.

- **a)** La probabilidad de que μ esté entre 4,8207 y 5,5563 es 0,90.
- **b)** El 90% de los rendimientos mensuales de la cartera está entre 4,8207 y 5,5563.
- **c)** Si repitiésemos el muestreo y construyésemos intervalos del mismo modo, aproximadamente el 90% de ellos contendría a μ.
- **d)** El valor μ cambia aleatoriamente de una muestra a otra, y por eso el intervalo tiene nivel de confianza 0,90.

1. La afirmación correcta es la c).

2. Una vez observada la muestra, el parámetro μ es fijo; lo aleatorio es el procedimiento de muestreo y, por tanto, el intervalo que se habría obtenido antes de observar los datos.

3. La afirmación a) es incorrecta porque interpreta como aleatorio al parámetro tras observar la muestra. La b) es incorrecta porque el intervalo se refiere a la media poblacional, no a los valores individuales. La d) también es incorrecta porque μ no varía de una muestra a otra.

Conclusión clave: un intervalo de confianza del 90% es un procedimiento que, repetido en las mismas condiciones, genera intervalos que contienen al parámetro en aproximadamente el 90% de las muestras.

Interpretación económica: si una gestora repitiese el estudio muchas veces con muestras del mismo tamaño y construyera el intervalo siempre igual, alrededor de nueve de cada diez intervalos cubrirían el rendimiento medio mensual verdadero.

Observación. Conviene distinguir con nitidez entre parámetro fijo, muestra aleatoria e intervalo aleatorio.

Ejercicio 13. Intervalo unilateral para μ con σ conocida: gasto medio por cliente — CORE

Una empresa de distribución quiere asegurarse de que el gasto medio por cliente en una campaña promocional no supera cierto umbral. A partir de estudios anteriores se asume que la población puede modelizarse como N(μ,σ) con σ = 12 euros. En una muestra aleatoria simple de $n = 64$ clientes se obtiene $\bar{x} = 83$ euros. Construir un intervalo unilateral superior del 95% para μ.

Parámetro	μ, gasto medio por cliente.
Supuesto	Población normal N(μ,σ) con σ conocida.
Datos	$\bar{x} = 83;\ \sigma = 12;\ n = 64;\ \gamma = 0{,}95;\ \alpha = 0{,}05.$
Método	Intervalo unilateral superior basado en Z.

1. En un intervalo unilateral superior del 95% para μ, el valor crítico es $z_\alpha = z_{0{,}05} = 1{,}6449$.

2. La cota superior es $\bar{x} + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 83 + 1{,}6449 \cdot \frac{12}{8} = 85{,}4674.$

3. Por tanto, el intervalo unilateral superior es $(-\infty\ ;\ 85{,}4674]$.

I.C. unilateral superior del 95% para μ: $(-\infty\ ;\ 85{,}4674]$ euros

Interpretación económica: con este procedimiento puede afirmarse, al 95% de confianza, que el gasto medio verdadero por cliente no supera aproximadamente los 85,47 euros.

Observación. Clave de examen: en los unilaterales solo aparece una cota finita. No debe confundirse z_(α) con z_(α/2), que corresponde al caso bilateral.

Ejercicio 14. ¿Es aplicable el intervalo aproximado para π? — CORE

Una fintech estudia la proporción π de clientes que activa una nueva funcionalidad de la aplicación. Analícense dos muestras independientes:

- Muestra A: n = 40 clientes, de los cuales 3 activan la funcionalidad.
- Muestra B: n = 400 clientes, de los cuales 30 activan la funcionalidad.

Para cada muestra, indíquese si procede usar el intervalo aproximado bilateral del 95% para π y, en caso afirmativo, constrúyase el intervalo.

1. En ambas muestras la proporción muestral es p = 3/40 = 30/400 = 0,075.

2. Muestra A: $np = 40 \cdot 0{,}075 = 3$ y $n(1-p) = 37$. La regla práctica no se cumple porque np es demasiado pequeño. Por tanto, no conviene aplicar aquí el intervalo normal aproximado explicado en el tema.

3. Muestra B: $np = 400 \cdot 0{,}075 = 30$ y $n(1-p) = 370$. La regla práctica sí se cumple, luego el intervalo aproximado es aplicable.

4. Para la muestra B, la semi-amplitud es $1{,}9600 \cdot \sqrt{0{,}075 \cdot \frac{0{,}925}{400}} = 0{,}0258$.

5. Así, el intervalo del 95% para π en la muestra B es $[0{,}0492\ ;\ 0{,}1008]$.

Conclusión: con la muestra A no procede el intervalo aproximado del tema; con la muestra B sí, y resulta $\pi \in [0{,}0492\ ;\ 0{,}1008]$.

Interpretación económica: la empresa solo puede usar con cierta tranquilidad la aproximación normal cuando el tamaño muestral y la frecuencia esperada de éxitos y fracasos son suficientemente grandes.

Observación. Antes de construir un intervalo para π hay que comprobar siempre la regla práctica. Un resultado numérico correcto con un método no aplicable sigue siendo una respuesta incorrecta.

Ejercicio 15. Selección del procedimiento adecuado

CORE

Para cada mini-caso, identifique el parámetro, el supuesto clave y el procedimiento que corresponde. No se pide calcular el intervalo completo; se pide decidir correctamente.

a) Una empresa de logística quiere estimar el tiempo medio de entrega. La población puede considerarse normal, σ es desconocida y se dispone de $n = 18$ observaciones con $\bar{x}$ y S_1.
b) Un banco quiere estimar la variabilidad del importe de los descubiertos en cuenta. La población puede considerarse normal y se dispone de $n = 22$ observaciones y S^2.
c) Una plataforma de suscripción quiere estimar la proporción de clientes que se da de baja. Se dispone de $n = 600$ clientes y $p = 0{,}11$.
d) Una empresa industrial quiere estimar el coste medio por expediente, sin asumir normalidad y con solo información sobre σ, n y $\bar{x}$, utilizando una cota de cobertura al menos γ.

1. Caso a): parámetro μ; supuesto de normalidad con σ desconocida; procedimiento: intervalo bilateral basado en t de Student.

2. Caso b): parámetro σ^2 (o σ, si luego se toma raíz); supuesto de normalidad; procedimiento: intervalo basado en el pivote $n \cdot S^2/\sigma^2$ y la distribución χ^2 con $n-1$ grados de libertad.

3. Caso c): parámetro π; muestra grande con comprobación de la regla práctica; procedimiento: intervalo aproximado normal para proporciones.

4. Caso d): parámetro μ; distribución desconocida sin normalidad; procedimiento: intervalo que contenga al parámetro con probabilidad al menos γ mediante la desigualdad de Chebyshev.

Idea central: antes de calcular, hay que decidir bien el parámetro, el supuesto y el pivote. Muchas equivocaciones de examen no son de cálculo, sino de elección del método.

Errores frecuentes que conviene evitar

- Confundir el caso σ conocida con el caso σ desconocida.
- Olvidar que en este curso $N(\mu,\sigma)$ usa σ como desviación típica, no como varianza.
- Usar S^2 y S_1^2 como si fueran la misma magnitud sin convertir cuando es necesario.
- Aplicar el intervalo aproximado de proporciones sin comprobar antes np y $n(1-p)$.
- Olvidar redondear hacia arriba en problemas de tamaño muestral.
- Interpretar un I.C. como si μ o π fueran aleatorios después de observar la muestra; lo aleatorio es el procedimiento antes de muestrear.

3. Bibliografía recomendada

Las siguientes referencias son útiles para consolidar los intervalos de confianza y su interpretación. La primera coincide con la bibliografía básica utilizada en el tema.

Ruiz-Maya Pérez, L., y Martín-Pliego López, F. J. Fundamentos de Inferencia Estadística. 3.ª ed. Thomson-Paraninfo.

Casella, G., y Berger, R. L. Statistical Inference. 2nd ed. Duxbury.

Newbold, P., Carlson, W. L., y Thorne, B. Statistics for Business and Economics. Pearson.

Wackerly, D., Mendenhall, W., y Scheaffer, R. Mathematical Statistics with Applications. Cengage.