Estadística II

Tema 1. Muestreo: estadísticos y sus distribuciones

Facultad de Ciencias de la Economía y de la Empresa (FCEE)

Curso 2025–2026 · 4.5 ECTS · 2º cuatrimestre

Francisco Rabadán Pérez, Raquel Ibar-Alonso y Ester Muñoz Céspedes

Departamento de Economía Aplicada I e Historia e Instituciones Económicas

Tema 1 · Objetivo

Al terminar este tema podrás:

- Comprender qué es una **muestra aleatoria simple** (m.a.s) y distinguir **parámetro** vs **estadístico** vs **estimador**.
- Uso del **m.a.s** para la definición de un estadístico T(X) y entender su **distribución en el muestreo**. Obtener $E(\bar{x})$ y $V(\bar{x})$ (y otros momentos) con reglas generales.
- Preparar la lógica de los **pivotes** que se usarán en intervalos de confianza y contrastes en temas posteriores.

Cómo leer estas etiquetas

CORE | PLUS | ANEXO

CORE: ideas y procedimientos que sostienen el curso entero y que se practican de forma recurrente.

PLUS: material para profundizar o reforzar intuición; ayuda a consolidar.

ANEXO: material de referencia/consulta.

Universidad Rey Juan Carlos

Facultad de Ciencias de la Economía y de la Empresa

CORE

Tema 1 · Esquema

Qué vamos a construir paso a paso:

1. **Conceptos básicos**: Población, variable, parámetro, muestra, estadístico.
2. **Muestreo**: Qué significa tomar una muestra y tipos de muestreo.
3. **Función de Distribución Conjunta y verosimilitud**: Dos lecturas de la misma expresión: datos vs parámetro.
4. **Motor de cálculo**: Cómo obtener esperanza y varianza de estadísticos con reglas simples.
5. **Distribuciones clave**: Media, varianza y proporciones: qué distribuciones aparecen y por qué.

Distribución de estadísticos en el muestreo

- **$N(\mu,\sigma)$ siendo σ conocida**
  - Distribución de $\bar{x}$
  - Distribución de S^2 y S_1^2
  - Distribución de $\bar{x}$ - $\bar{y}$
- **$N(\mu,\sigma)$ siendo σ desconocida**
  - Distribución de $\bar{x}$
  - Distribución de $\bar{x}$ - $\bar{y}$
- **$B(1,\pi)$**
  - Distribución de p
  - Distribución de p_1 - p_2

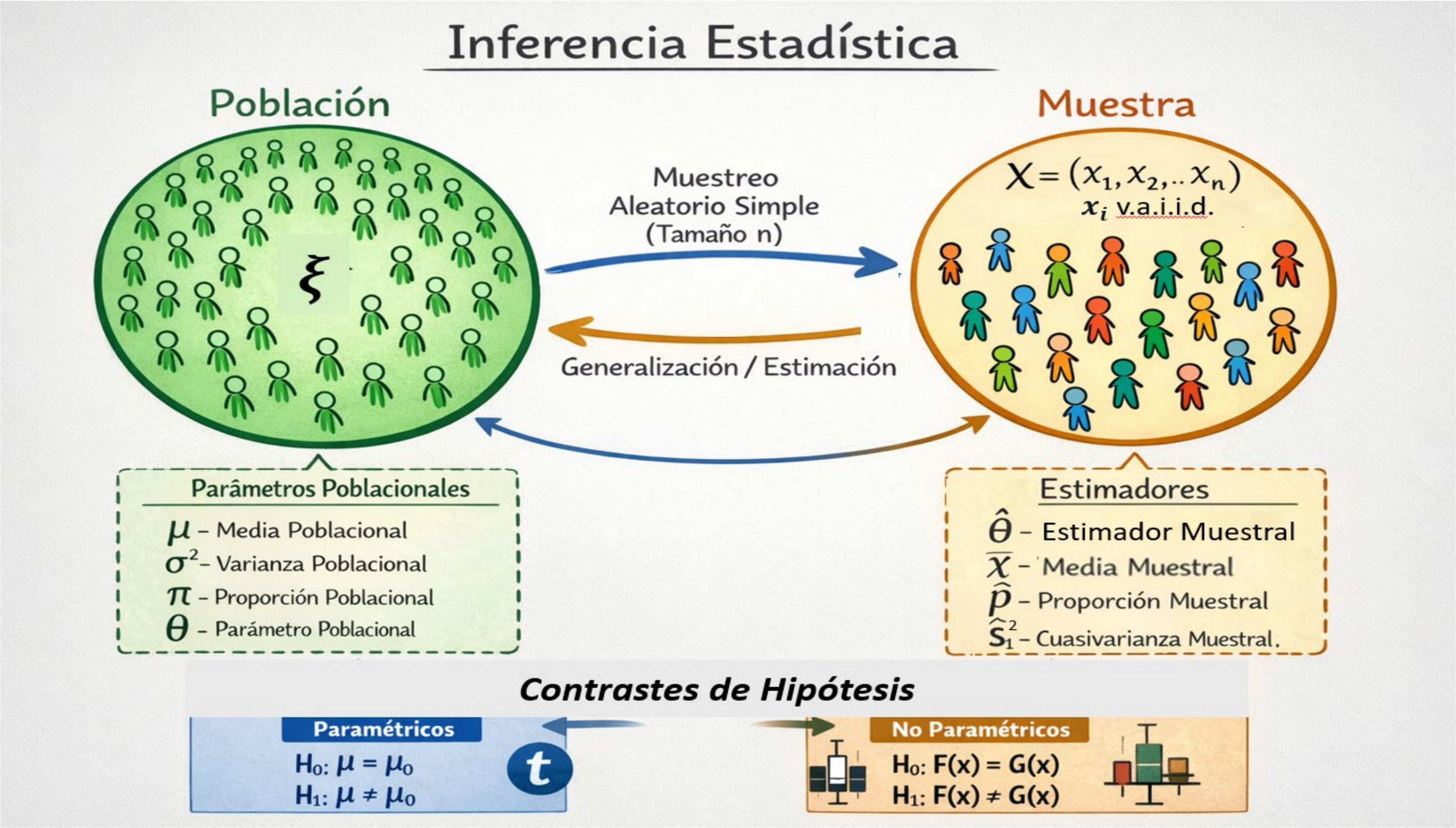
Breviario

CORE

- $\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}$: variables aleatorias muestrales.
- $\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\gamma}$: variables aleatorias poblacionales.
- $\boldsymbol{x_i}$: variable aleatoria muestral que "genera" el dato i-ésimo de la muestra ($\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n})$).
- **m.a.s.(n)**: muestra aleatoria simple de tamaño n.
- **V.a.i.i.d.:** "variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas".
- $\boldsymbol{\theta}$: parámetro.
- $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$: estadístico.
- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}) = \boldsymbol{\theta}^*(\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n})$: estimador.
- $\boldsymbol{\mu}$: media poblacional; $\boldsymbol{\sigma}$: desviación típica poblacional; $\boldsymbol{\sigma^2}$: varianza poblacional; $\boldsymbol{\pi}$ proporción poblacional.
- $\overline{\boldsymbol{x}}$: media muestral (promedio de los x_i); $\boldsymbol{S^2}$: varianza muestral (divisor n) ; $\boldsymbol{S_1^2}$: cuasi-varianza muestral (divisor $n-1$); $\boldsymbol{p}$: proporción muestral.
- $\boldsymbol{SD}(\cdot)$: desviación típica de … por ejemplo, $SD(\bar{x})$
- $\perp$: independencia estocástica (dos variables aleatorias A y B son independientes si conocer una no cambia la distribución de la otra).

¿Qué vamos a aprender?

CORE



1. Conceptos básicos

1. Conceptos básicos

CORE

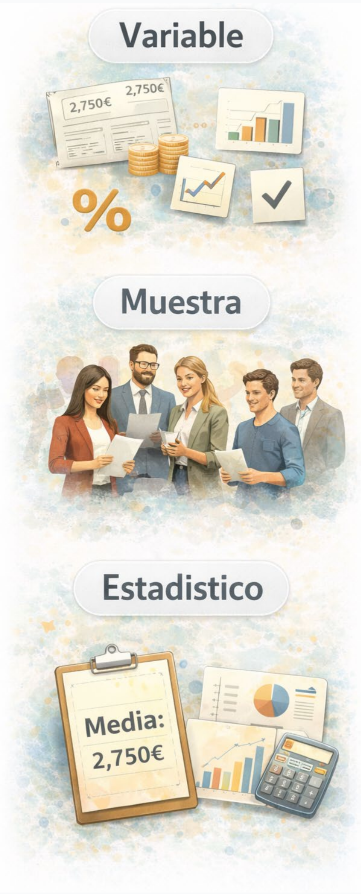
Definiciones: Población · muestra · estadístico · parámetro · fuentes de datos · variable

- **Fuentes de datos**: Conjuntos de registros/mediciones de donde obtenemos observaciones (p. ej., encuestas, registros administrativos, Eurostat/INE, datos internos de empresa).
- **Población (ξ)** : Conjunto total de unidades sobre el que queremos concluir (personas, empresas, transacciones…) definido por un criterio claro (ámbito, lugar, periodo).
- **Parámetro** $(\boldsymbol{\theta})$: Número fijo (**constante**) que caracteriza a la población respecto a la variable y que puede ser desconocido (media, varianza o proporción **poblacional**).

1. Conceptos básicos

CORE

Definiciones: Población · muestra · estadístico · parámetro · fuentes de datos · variable



Variable: Característica medible de cada unidad de la población (salario, gasto, tasa de morosidad, “renueva sí/no”…).

Muestra: Subconjunto de unidades de la población en la que que sí se puede observar la variable (los datos que tenemos).

Estadístico: *cualquier función calculada* a partir de las variables muestrales (cualquier función de $x_1, x_2, \ldots x_n$).

Estimador: estadístico adecuado que resume bien la información muestral o sirve para estimar un parámetro (media, varianza, cuasi-varianza, proporción).

Estimación: valor numérico del estadístico para una muestra concreta.

1. Conceptos básicos

CORE

Contexto → objeto estadístico

Población (variable, parámetro) → **Muestra representativa** (mas) → **Estimador** (variable aleatoria) → **Estimación** (datos observados)

Idea clave

Antes de calcular nada, siempre fijamos:

(1) **qué población** estamos describiendo,

(2) cómo seleccionamos la **muestra** y

(3) qué parámetro **representa** alguna característica desconocida de esa población.

En este tema estudiaremos cómo varía ese parámetro cuando repetimos el muestreo (su distribución en el muestreo).

Ejercicio rápido: da un ejemplo de población y de muestra en un contexto económico.

Ejercicios rápidos 1

Contexto → objeto estadístico

CORE

Gasto mensual de los hogares

Cartera de clientes

Ítem 1 (continuo)

En una región, queremos estudiar el gasto mensual en alimentación de los hogares.
Identifica: población · variable · parámetro de interés · muestra · un estadístico útil.

Ítem 1 (ejemplo de respuesta)

Población: hogares de la región en el periodo definido.
Variable: gasto mensual en alimentación (euros/mes).
Parámetro: media poblacional μ (y/o varianza σ^2).
Muestra: n hogares observados.
Estadístico: media muestral $\bar{x}$ (y/o varianza muestral S_x^2).

Ejercicios rápidos 1

CORE

Traducción de contexto económico a objetos estadísticos

Gasto mensual de los hogares

Cartera de clientes

Ítem 2 (binario)

En una cartera de clientes, medimos si renuevan su suscripción (sí/no). Identifica: población · variable · parámetro de interés · muestra · un estadístico útil.

Ítem 2 (ejemplo de respuesta)

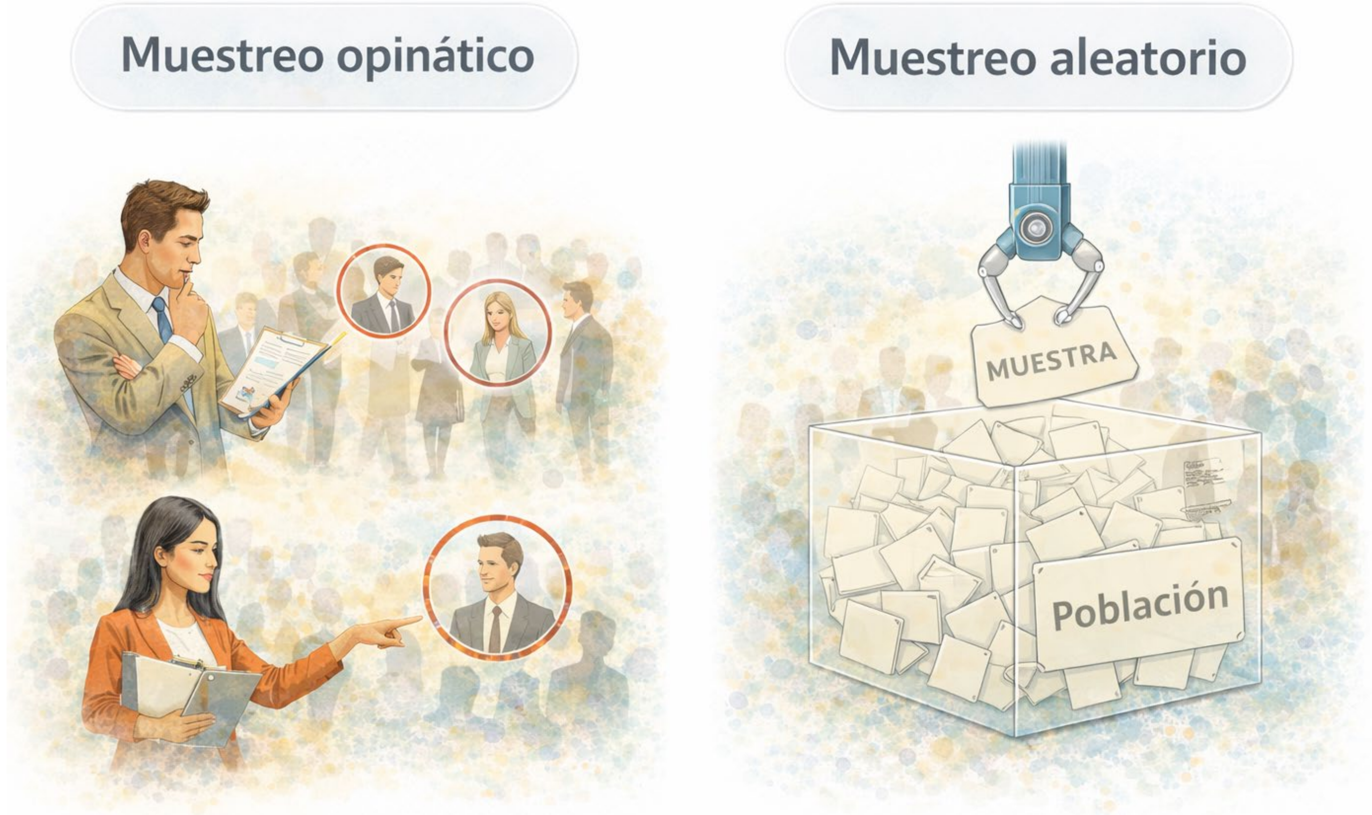
Población: clientes de la cartera en el periodo definido.
Variable: renovación (1 si renueva, 0 si no).
Parámetro: proporción poblacional π.
Muestra: n clientes observados.
Estadístico: proporción muestral p.

Sugerencia: respuestas en 30–45 segundos por ítem (en voz alta o por parejas).

Sección 2. Conceptos básicos de muestreo

2.1 Muestreo: ¿Por qué necesitamos extracción aleatoria?

CORE



Idea clave

Sin aleatoriedad podemos obtener números, pero sin garantía inferencial (capacidad de generalizar a la población).

Muestreo no aleatorio (opinático/conveniencia)

- Selección por conveniencia o juicio
- Riesgo de sesgo sistemático
- La incertidumbre no se puede cuantificar bien

Muestreo aleatorio simple (m.a.s.)

- Mecanismo aleatorio de selección
- Reduce sesgos de selección
- Permite cuantificar la incertidumbre

2.2 Muestro aleatorio simple: m.a.s (n)

Definición

Seleccionamos n unidades de la población de forma aleatoria (con reemplazamiento). La extracción de una unidad no altera la forma de extracción de las demás (probabilidades de selección constantes).

¿Qué haremos con esto?

A partir de aquí obtenemos **estadísticos muestrales como funciones de variables aleatorias** extraídas de la población.

CORE

2.3 Muestreo: Qué garantiza un m.a.s. (tamaño n)

El m.a.s.(n) garantiza

1. $\mathrm{x_i}$ son **idénticamente distribuidas** como la variable poblacional: $\mathrm{x_i} \sim \xi$
2. $\mathrm{x_i}$ **se distribuye como** ξ: misma función de probabilidad/densidad
3. $\mathrm{x_i} \perp \mathrm{x}_j \; \forall i \neq j$: **independencia**. La selección de una unidad no condiciona las demás: las probabilidades de selección se mantienen constantes

Consecuencias inmediatas

- $\mathrm{E}(\mathrm{x_i}) = \mathrm{E}(\xi) = \mu$
- $\mathrm{V}(\mathrm{x_i}) = \mathrm{V}(\xi) = \sigma^2$

Denotamos …

1. ξ es **variable aleatoria poblacional**
2. X es **muestra**: vector de observaciones muestral
3. x_{i} es **variable aleatoria muestral**
4. **vaiid: Variables Aleatorias Independientes e Idénticamente Distribuidas** (como la población)

Ejercicios rápidos 2

CORE

Por qué importa la extracción aleatoria (sin tecnicismos)

Ítem 1

Encuesta de empleo realizada solo a personas disponibles a las 12:00 en un campus universitario.

Pregunta: ¿qué problema puede introducir este procedimiento al describir la población objetivo?

Ejercicios rápidos 2

CORE

Por qué importa la extracción aleatoria (sin tecnicismos)

Ítem 1

Encuesta de empleo realizada solo a personas disponibles a las 12:00 en un campus universitario. Pregunta: ¿qué problema puede introducir este procedimiento al describir la población objetivo?

Ítem 1 (idea clave)

Riesgo de sesgo de selección: la muestra puede no representar a la población objetivo.
El resultado puede describir bien al campus a las 12:00… pero no a la población que interesa.

Piensa en: representatividad y posibilidad de medir. incertidumbre

Respuestas 2

CORE

Extracción aleatoria

Ítem 2

Queremos estimar una proporción poblacional con una muestra extraída por un mecanismo aleatorio. Pregunta: ¿qué ventaja práctica nos da la aleatoriedad cuando interpretamos el resultado?

Respuestas 2

CORE

Extracción aleatoria

Ítem 2

Queremos estimar una proporción poblacional con una muestra extraída por un mecanismo aleatorio. Pregunta: ¿qué ventaja práctica nos da la aleatoriedad cuando interpretamos el resultado?

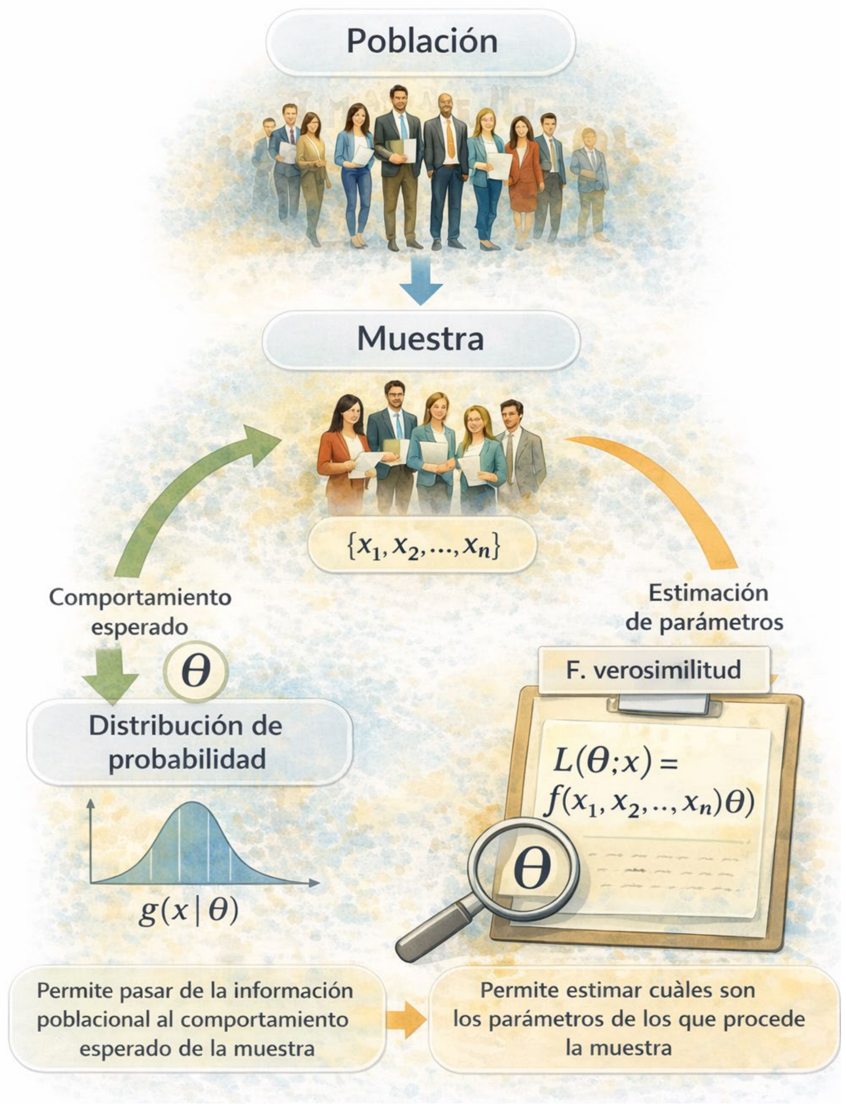
Ítem 2 (idea clave)

La aleatoriedad permite trabajar con un modelo probabilístico: podemos cuantificar la incertidumbre y construir intervalos/contrastes más adelante.

Sección 3. Distribución muestral

3.1 Modelo probabilístico vs verosimilitud

CORE



Función de probabilidad

Describe el comportamiento de la variable de la población. Es el modelo que genera la muestra.

$f(X \mid \theta)$; $P(X \mid \theta)$; θ es un parámetro fijo; x es el argumento de la función

Función de verosimilitud

Misma expresión, distinto rol: θ es el argumento de la función; x es un dato fijo.

$$L(\theta; X) = f(X \mid \theta)\ ;\ L(\theta;\ x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n \mid \theta)$$

CORE

3.1 Ejemplo: $B(1, \pi)$ (Bernoulli)

Función de probabilidad (modelo)

Población: cada compra es "éxito" si supera 50€

$$x_i \sim B(1, \pi), \qquad \pi = P(\xi = 1)$$

$$f(x|\theta) = P(x = 1|\pi) = \pi^x (1-\pi)^{1-x}, x \in \{0,1\}$$

- π es **parámetro** fijo (proporción poblacional de "éxitos")
- x es el **argumento** (resultado observado: 0 ó 1)

Función de verosimilitud (datos fijos, π variable)

Observamos una muestra i.i.d. $x_1, \dots, x_n$ donde cada $x_i \in \{0,1\}$
Sea $S = \sum_{i=1}^{N} x_i$ (nº de éxitos).

$$L(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \pi^{x_i} (1-\pi)^{1-x_i} = \pi^S (1-\pi)^{n-s}$$

- **Misma expresión, distinta lectura**: ahora los datos están fijos y π varía
- **Máxima verosimilitud**: $\hat{\pi} = \frac{S}{n}$ (lo veremos mas adelante)

Para fijar ideas

- **Función de probabilidad**

Si $\pi = 0{,}6$, entonces un individuo al azar tiene probabilidad $P(x_i = 1) = 0{,}6$ de "éxito" y $P(x_i = 0) = 0{,}4$ de "fracaso".

- **Función de verosimilitud**

Si $n = 20$ compras y $S = 12$ superan 50€:

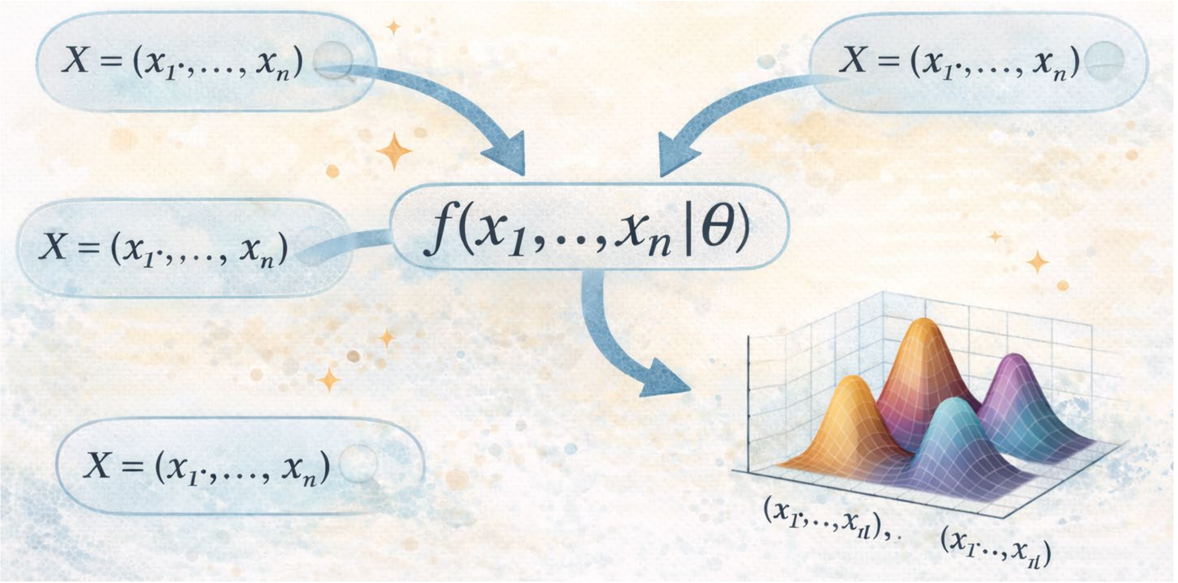
$$L(\pi) = \pi^{12}(1-\pi)^8 \rightarrow$$
$$\rightarrow \hat{\pi} = \frac{12}{20} = 0{,}6$$

3.2 Distribución conjunta de la muestra

CORE

$\mathbf{f}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{\theta})$ **describe** cómo se comporta el vector completo de **observaciones cuando repetimos el muestreo**; es decir, asigna una probabilidad (si es discreta) o una densidad (si es continua) a cada posible combinación de valores $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n)$

CORE



Regla operativa (vaiiid)

$$f(x_1, \dots, x_\mathrm{n} \mid \theta) = \prod f(x_\mathrm{i} \mid \theta)$$

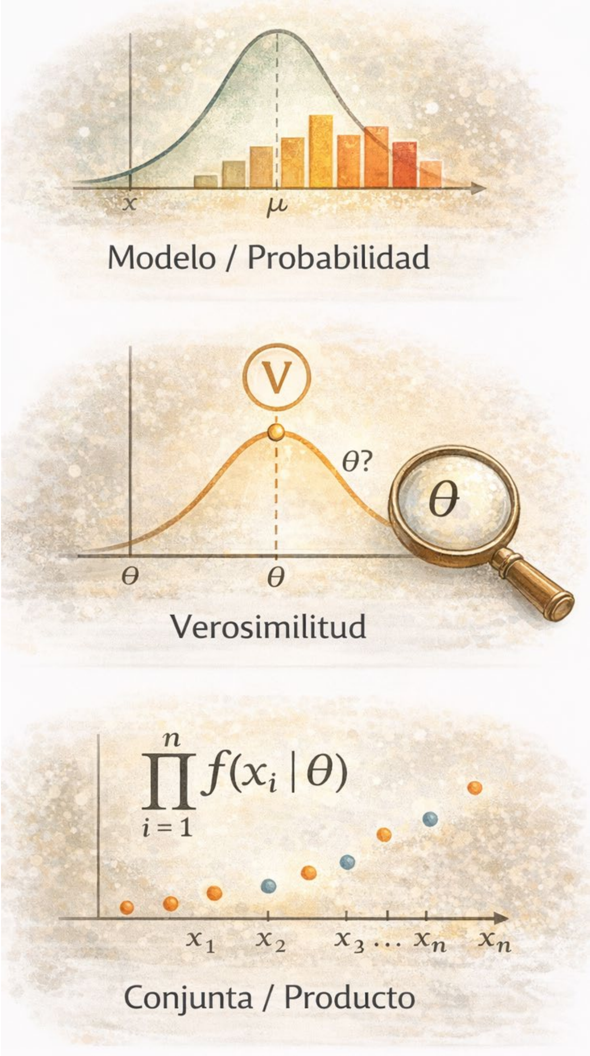
Ejercicio rápido: si las observaciones no fueran independientes, ¿seguiría siendo un producto?

Para qué nos sirve

Sirve para construir estadísticos y, más adelante, para introducir verosimilitud y estimación.

Ejercicios rápidos 3

CORE



Ítem 1 (clasificación)

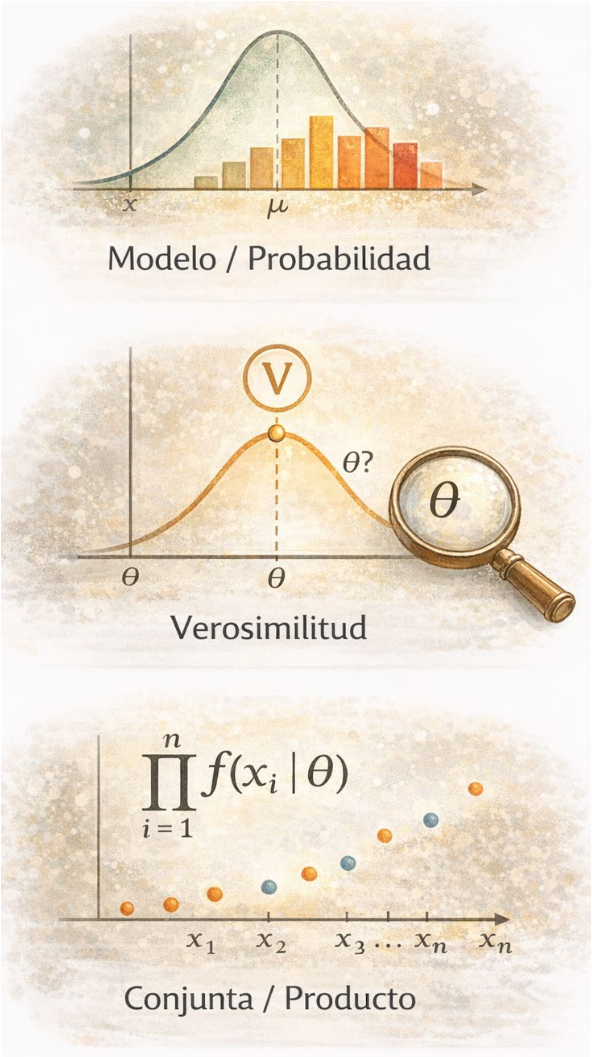
En cada enunciado, marca M si la expresión se usa como modelo de probabilidad o V si se usa como verosimilitud :

a) "$f(X \mid \theta)$ describe el comportamiento de X cuando repetimos el muestreo."

b) "$L(\theta; X)$ se usa para encontrar el mejor valor de θ (parámetro desconocido) con los datos fijos."

Ejercicios rápidos 3

CORE



Ítem 1 (clasificación)

En cada enunciado, marca M si la expresión se usa como modelo de probabilidad o V si se usa como verosimilitud :

a) "$f(X \mid \theta)$ describe el comportamiento de X cuando repetimos el muestreo."

b) "$L(\theta; X)$ se usa para encontrar el mejor valor de θ (parámetro desconocido) con los datos fijos."

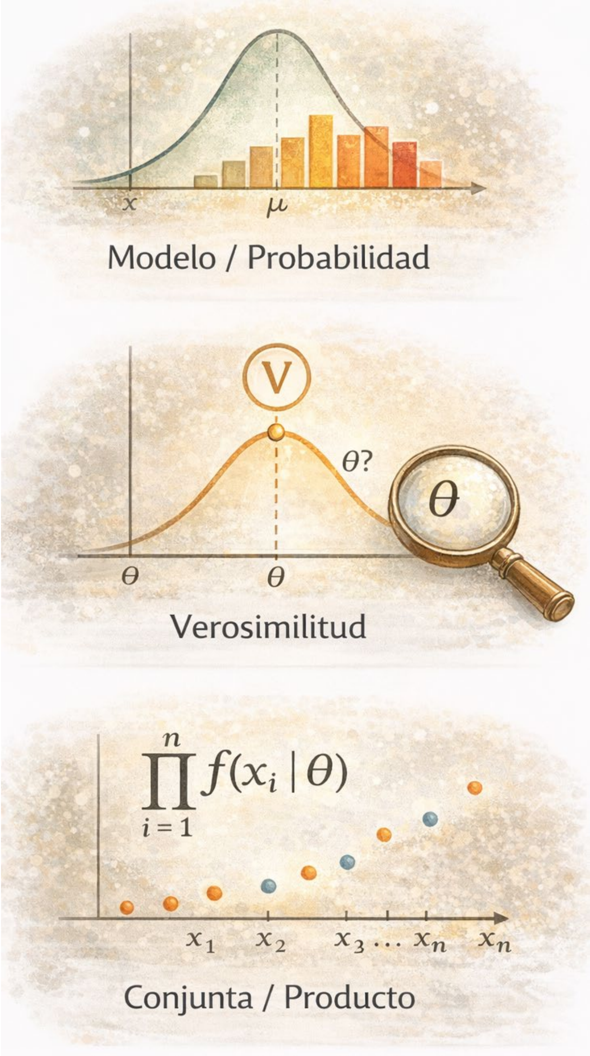
Ítem 1

a) M (modelo/probabilidad)

b) V (verosimilitud)

Ejercicios rápidos 3

CORE



Ítem 2 (notación)

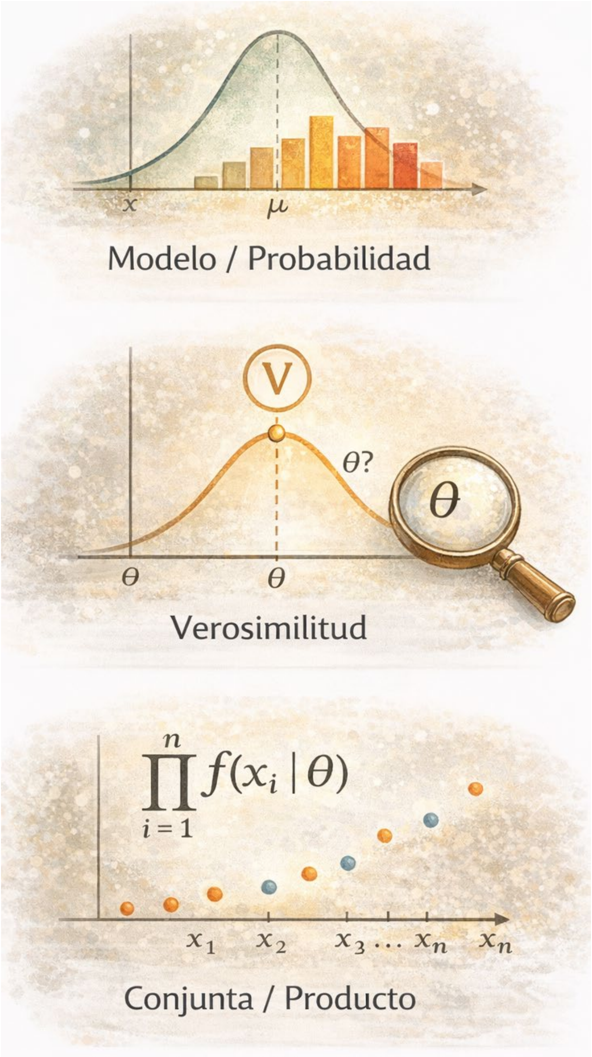
En la expresión $f(x_1, \dots, x_n \mid \theta)$, identifica qué representa:

- $x_1, \dots, x_n$
- θ

y di en una frase qué describe esa expresión.

Ejercicios rápidos 3

CORE



Ítem 2 (notación)

En la expresión $f(x_1, \dots, x_n \mid \theta)$, identifica qué representa:

- $x_1, \dots, x_n$
- θ

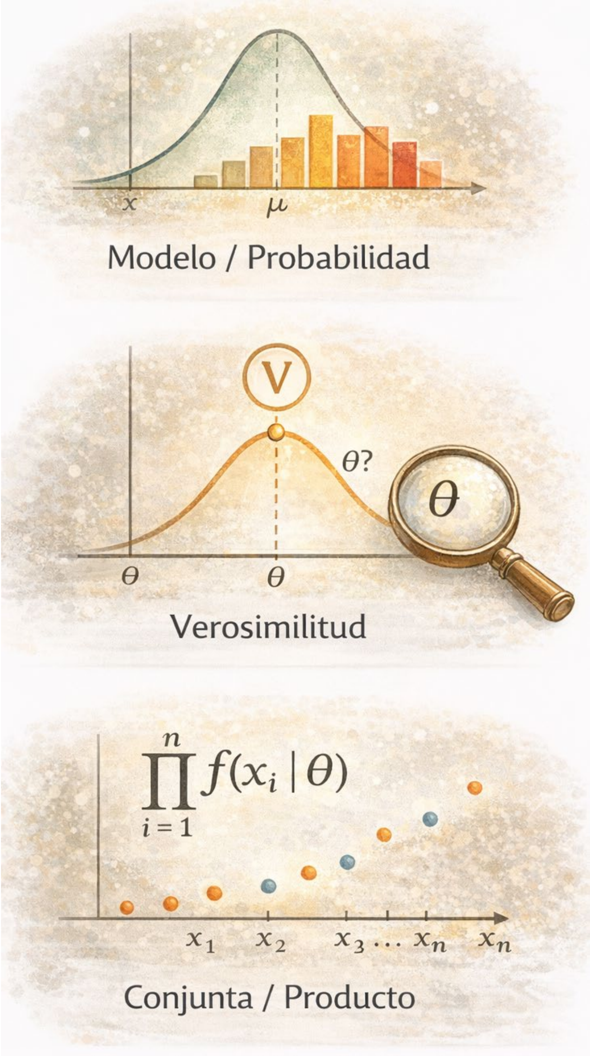
y di en una frase qué describe esa expresión.

Ítem 2

- $x_1, \dots, x_n$: variables muestrales.
- θ: parámetro (constante desconocida).
- Estima la función probabilidad de observar esa muestra dado θ.

Ejercicios rápidos 3

CORE

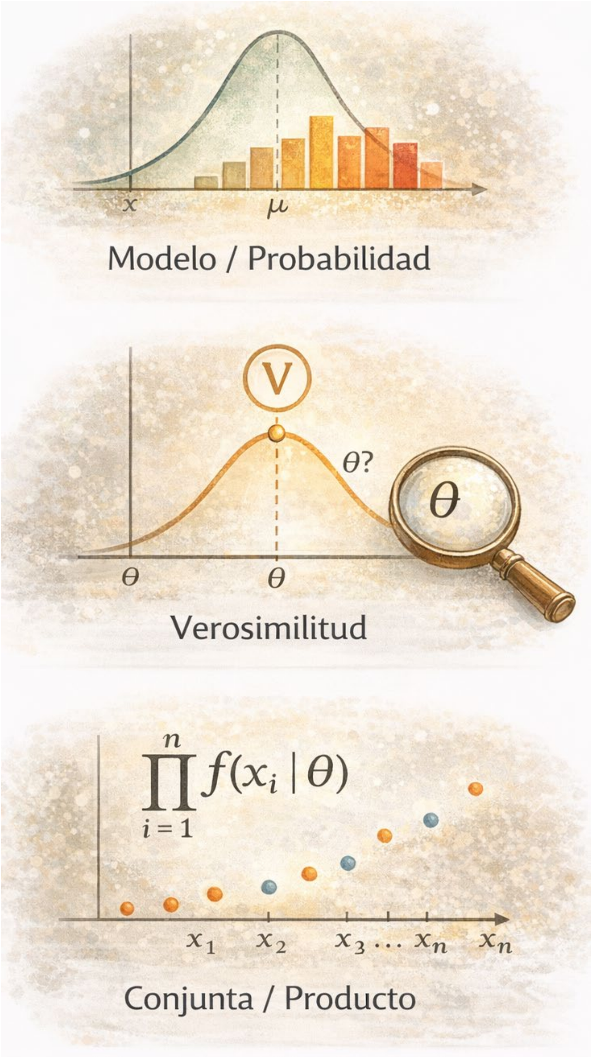


Ítem 3 (regla operativa)

Bajo el supuesto habitual del curso (observaciones procedentes de un m.a.s.): escribe cómo se expresa la distribución conjunta de la muestra como un producto.

Ejercicios rápidos 3

CORE



Ítem 3 (regla operativa)

Bajo el supuesto habitual del curso (observaciones procedentes de un m.a.s.): escribe cómo se expresa la distribución conjunta de la muestra como un producto.

Ítem 3

$$f(x_1, \dots, x_n \mid \theta) = \prod f(x_i \mid \theta)$$

4. Concepto de estadístico

4.1 Estadístico = función de la muestra

CORE

Cualquier operación con los datos (pero solo algunas son útiles)

Idea clave

- La muestra se puede ver como un vector: $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n})$.
- $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$:Un estadístico es cualquier función de las variables muestrales.
- Como depende de la muestra, $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ **es variable aleatoria**.

Ejemplos de estadísticos útiles

- $\bar{\mathrm{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x_i}}{\mathrm{n}}$ (media muestral)
- $\mathrm{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{x_i} - \bar{\mathrm{x}})^2}{\mathrm{n}}$ (varianza muestral)
- $\mathrm{S}_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{x_i} - \bar{\mathrm{x}})^2}{\mathrm{n} - 1}$(cuasivarianza)
- $\mathrm{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x_i}}{\mathrm{n}} \quad si \quad \mathrm{x_i} = \{0,1\}$ (proporción muestral)

Ejercicios rápidos (Sección 4.1)

CORE

Parámetro o estadístico · Identificación en 30 segundos

Ítem 1 (clasifica)

Marca P si es parámetro poblacional o E si es estadístico muestral:

a) μ b) $\bar{x}$ c) π d) p e) σ^2 f) S^2

Ítem 2 (¿depende de los datos?)

Una empresa mide el tiempo de espera de n llamadas.

¿Cuál de estas cantidades depende de los datos observados?

a) Media poblacional del tiempo de espera b) Media muestral del tiempo de espera

Respuestas (muy breve)

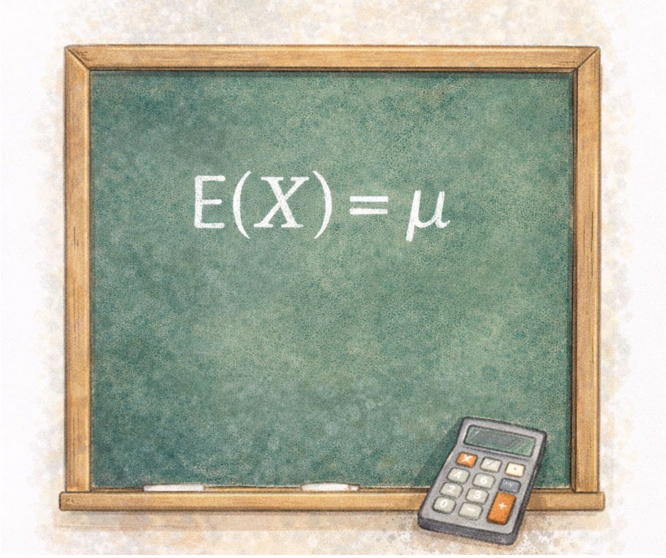
Ítem 1: a P, b E, c P, d E, e P, f E

Ítem 2: depende de los datos observados la opción b

4.2 · Propiedades de E[$\hat{\theta}$]

CORE

Reglas que nos permiten generar resultados (sin memorizar)



Esperanza: reglas básicas

1) $E(a \cdot x + b) = a \cdot E(x) + b$
2) $E(x_1 + \ldots + x_n) = E(x_1) + \ldots + E(x_n)$

Clave: para la suma de esperanzas no hace falta suponer independencia.

3) $E(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) = E(x_1) \cdot \ldots \cdot E(x_n) \quad si \quad x_i\ v.a.i.$

Mini-ejemplo (para usar luego)

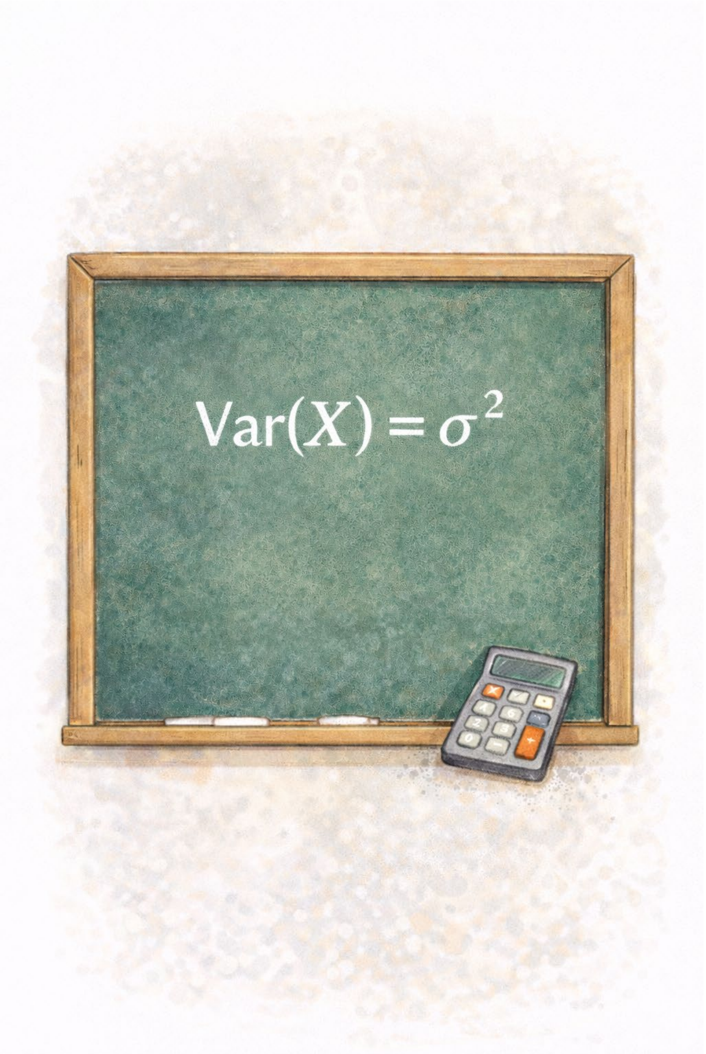
Si $\hat{\theta} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n}$

$$entonces:\ E[\hat{\theta}] = E[\bar{x}] = \frac{E(x_1) + E(x_2) + \cdots + E(x_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} E(x_i)}{n}$$

4.2 · Propiedades de Var($\hat{\theta}$)

Varianza: escala, suma y covarianza

CORE



Varianza: reglas básicas

1) $Var(a \cdot X + b) = a^2 \cdot Var(X)$

2) $Var(x_1 \pm \cdots \pm x_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(\mathrm{x_i}) \pm 2 \cdot \sum_{i<j}^{n} Cov(x_i, x_j)$

Clave: la covarianza mide dependencia entre variables muestrales

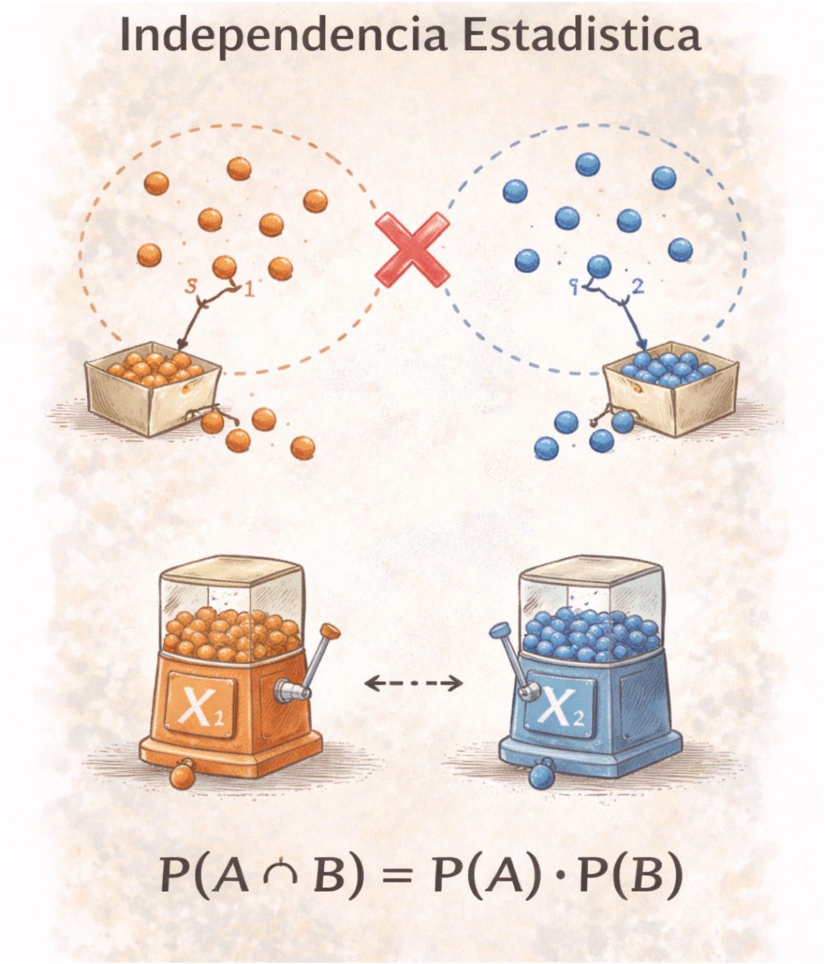
Qué nos dice esta fórmula

- Si las observaciones están relacionadas, la varianza de la suma incluye la covarianza.
- Por eso, cuando asumimos independencia, la fórmula se simplifica mucho.

4.3 Propiedades de Var($\hat{\theta}$)

Independencia como supuesto operativo

CORE



Supuesto habitual (para poder avanzar)

Si las variables muestrales son independientes:

$$Cov(x_i, x_j) = 0 \text{ para } i \neq j$$

Entonces: $V\,(x_1 \pm \cdots \pm x_n) = \sum_{i=1}^{n} V(\mathrm{x_i})$

Por qué lo usamos en el curso

Nos permite obtener expresiones simples para $V(\bar{x})$ y $V(p)$. Más adelante veremos casos donde esta hipótesis es discutible.

Ejercicio rápido (30 s)

¿Necesito independencia para calcular $E(\bar{x})$? No.
¿Y para simplificar $V(\bar{x})$? Sí.

4.4 Aplicación inmediata

CORE

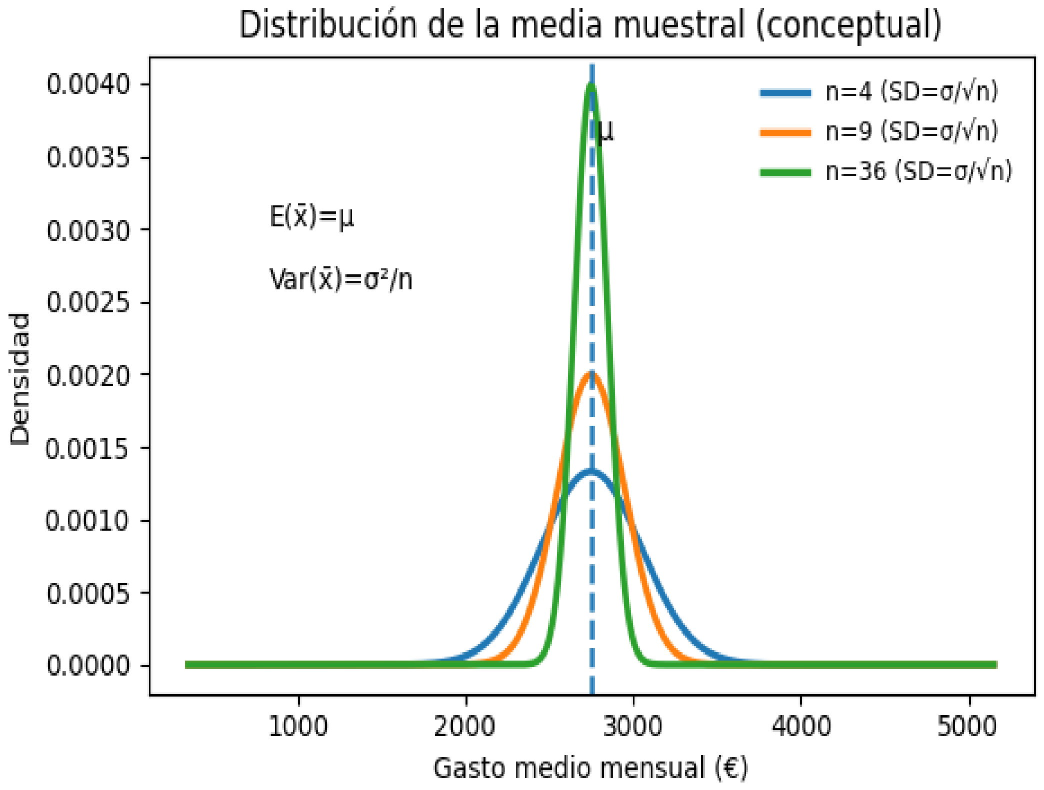
Consecuencias del m.a.s. en el cálculo de la Esperanza y Varianza de la **media aritmética**

Supuesto habitual

Sea ξ v.a. poblacional con $E(\xi) = \mu$ y $V(\xi) = \sigma^2$

y dada una m.a.s.

$E(x_i) = \mu$ y $V(x_i) = \sigma^2$



Se define $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{entonces}$:

$$\boldsymbol{E}[\widehat{\boldsymbol{\theta}}] = \boldsymbol{E}(\overline{\boldsymbol{x}}) = E\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) = \frac{1}{n} nE(x_i) = \boldsymbol{\mu}$$

$$\boldsymbol{V}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{V}(\overline{\boldsymbol{x}}) = V\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} nV(x_i) = \frac{\boldsymbol{\sigma^2}}{\boldsymbol{n}}$$

Ejercicios rápidos (Sección 4)

CORE

Parámetro o estadístico · Identificación en 30 segundos

Ejercicio rápido (cálculo)

Una población tiene media $\mu = 50$ y varianza $\sigma^2 = 100$. Se extrae un m.a.s. de tamaño $n = 25$.

1. Calcular $E(\bar{x})$.
2. Calcular $V(\bar{x})$.

Ejercicios rápidos (Sección 4)

CORE

Parámetro o estadístico · Identificación en 30 segundos

Ejercicio rápido (cálculo)

Una población tiene media $\mu = 50$ y varianza $\sigma^2 = 100$. Se extrae un m.a.s. de tamaño $n = 25$.

1. Calcular $E(\bar{x})$.
2. Calcular $V(\bar{x})$.

Respuesta esperada (muy breve)

1. $E(\bar{x}) = \mu = 50$

2. $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{100}{25} = 4$

4.5 Aplicación inmediata

CORE

Consecuencias del m.a.s. en la Esperanza de la **varianza muestral**

Supuesto habitual

Sea ξ v.a. poblacional con $E(\xi) = \mu$ y $V(\xi) = \sigma^2$

y gracias al m.a.s.

$E(x_i) = \mu$ y $V(x_i) = \sigma^2$

Se define $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{S^2}$, entonces:

$$\mathbf{E}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{S^2}) = \mathrm{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x_i} - \mu + \mu - \bar{\mathrm{x}})^2}{\mathrm{n}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{n}}\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x_i} - \mu)^2 - 2(\bar{\mathrm{x}} - \mu)\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x_i} - \mu) + \sum_{i=1}^{n}(\bar{\mathrm{x}} - \mu)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{n}}\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x_i} - \mu)^2 - 2(\bar{\mathrm{x}} - \mu)n(\bar{\mathrm{x}} - \mu) + n(\bar{\mathrm{x}} - \mu)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{n}}\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x_i} - \mu)^2 - 2n(\bar{\mathrm{x}} - \mu)^2 + n(\bar{\mathrm{x}} - \mu)^2\right] = \frac{1}{\mathrm{n}}\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x_i} - \mu)^2 - n(\bar{\mathrm{x}} - \mu)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{n}}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[(\mathrm{x_i} - \mu)^2] - n\mathrm{E}[(\bar{\mathrm{x}} - \mu)^2]\right] = \frac{1}{\mathrm{n}}[\mathrm{n}Var(\mathrm{x_i}) - \mathrm{n}Var(\bar{\mathrm{x}})] = \frac{1}{\mathrm{n}}\left[\mathrm{n}\sigma^2 - \mathrm{n}\frac{\sigma^2}{\mathrm{n}}\right] = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{\mathrm{n}} = \frac{\mathbf{n-1}}{\mathbf{n}}\boldsymbol{\sigma^2}$$

4.6 · Aplicación inmediata

CORE

Consecuencias del m.a.s. en la Esperanza de la **varianza muestral**

Supuesto habitual

Sea ξ población con $E(\xi) = \mu$ y $V(\xi) = \sigma^2$

y gracias al m.a.s.

$E(x_i) = \mu$ y $V(x_i) = \sigma^2$

De manera inmediata:

$$S_1^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{n}{n-1}\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{n}{n-1} S^2$$

$$(n-1)S_1^2 = nS^2$$

Usando el operador Esperanza:

$$E(S_1^2) = \frac{n}{n-1}E(S^2) = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

Identidades fundamentales

$$(n-1)E(S_1^2) = nE(S^2)$$

Ejercicios rápidos (Sección 4)

CORE

Parámetro o estadístico · Identificación en 30 segundos

Ejercicio rápido (cálculo)

En una $\mathrm{m.a.s}(10)$ se calcula la varianza muestral del gasto mensual de unos hogares $S^2 = 180$.

1. Calcular el valor de la cuasivarianza.
2. Interpreta el resultado en una frase.

Ejercicios rápidos (Sección 4)

CORE

Parámetro o estadístico · Identificación en 30 segundos

Ejercicio rápido (cálculo)

En una $\mathrm{m.a.s}(10)$ se calcula la varianza muestral del gasto mensual de unos hogares $S^2 = 180$.

1. Calcular el valor de la cuasivarianza.
2. Interpreta el resultado en una frase.

Cálculo esperado

1. $S_1^2 = \frac{10}{9} * 180 = 200$
2. **Interpretación esperada:** La cuasivarianza ajusta al alza la variabilidad observada para compensar el efecto del tamaño muestral.

Ejercicios rápidos (Sección 4)

CORE

Parámetro o estadístico · Identificación en 30 segundos

Pregunta tipo test

Cuando el tamaño muestral n aumenta, la relación $E\left(S_1^2\right) = \frac{n}{n-1} E\left(S^2\right)$ implica que:

a) La diferencia entre $E\left(S_1^2\right)$ y $E\left(S^2\right)$ aumenta.

b) La diferencia entre $E\left(S_1^2\right)$ y $E\left(S^2\right)$ disminuye.

c) Ambas esperanzas son siempre iguales, independientemente de n.

d) La relación solo es válida si la población es normal.

Ejercicios rápidos (Sección 4)

CORE

Parámetro o estadístico · Identificación en 30 segundos

Pregunta tipo test

Cuando el tamaño muestral n aumenta, la relación $E\left(S_1^2\right) = \frac{n}{n-1} E\left(S^2\right)$ implica que:

a) La diferencia entre $E\left(S_1^2\right)$ y $E\left(S^2\right)$ aumenta.

b) La diferencia entre $E\left(S_1^2\right)$ y $E\left(S^2\right)$ disminuye.

c) Ambas esperanzas son siempre iguales, independientemente de n.

d) La relación solo es válida si la población es normal.

Respuesta correcta: B

A medida que n crece, el factor $\frac{n}{n-1}$ se aproxima a 1, y la diferencia entre ambas cantidades se vuelve despreciable.

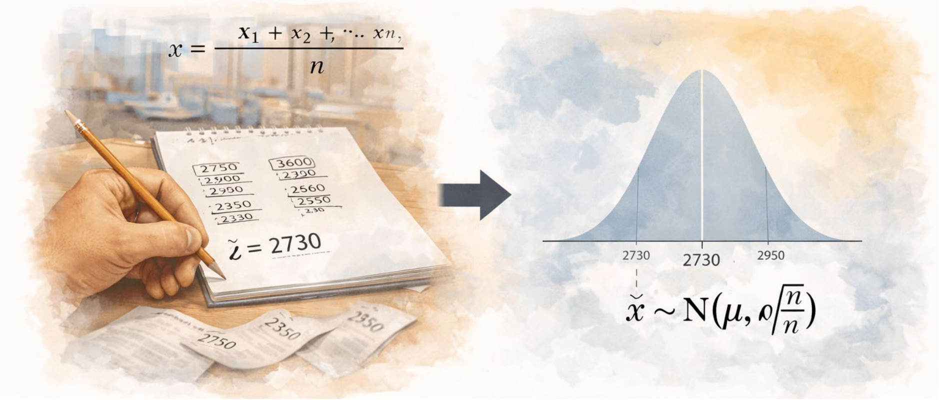
5. Muestreo en poblaciones normales con σ^2 conocida

CORE

5.1 Distribución de $\bar{x}$ en población normal con σ^2 conocida

Distribución de la **media muestral**

Estadístico: $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x}$



Hipótesis de partida

$\xi \sim N(\mu, \sigma)$

→ $x_i \sim N(\mu, \sigma)$

Resultados conocidos

$E(\bar{x}) = \mu$

$V(\bar{x}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

Consecuencia clave:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Ideas clave

- $\bar{x}$ es combinación lineal
- Normalidad se "hereda" en el m.a.s.
- Combinación lineal de normales independientes → normal

CORE

Ejercicios rápidos (Sección 5.1)

Ejercicio rápido (cálculo)

En un mercado local, el gasto mensual (en €) de los hogares sigue una normal con $\mu = 2.750$ y desviación típica $\sigma = 600$. Se toma una muestra aleatoria de $n = 36$ hogares.

Pregunta

Calcular $\mathrm{P}(\bar{x} > 2.900)$.

Mensaje didáctico

La media de 36 hogares varía mucho menos que la de un solo hogar: la desviación típica es $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100€$

Solución (muy breve)

1. Distribución de la media muestral

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow \bar{x} \sim N\left(2750, \frac{600}{\sqrt{36}}\right) = N(2750,100)$$

2. Tipificamos:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

3. Cálculo de la probabilidad:

$$\mathrm{P}(\bar{x} > 2.900) = P\left(Z > \frac{2.900 - 2750}{100}\right) = P(z > 1{,}5)$$

3. Valor (tabla/normal estándar) :

$$P(z > 1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5) \approx 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$$

CORE

5.2 Distribución de S^2 en población normal con σ^2 conocida

Distribución de la **varianza y cuasivarianza muestral**

Estadístico: $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = S^2$

$\xi \sim N(\mu, \sigma)$ ➡ $x_i \sim N(\mu, \sigma)$

Lema de Fisher-Cochran (idea intuitiva)

En una muestra normal, la “variabilidad total” **(a)** se puede descomponer en *variabilidad alrededor* de $\bar{x}$ **(b)**+ *variabilidad debida* a $\bar{x}$ **(c)**, y esas partes quedan independientes. *Ver: Casella, G., & Berger, R. L. (2002)*

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]_{(a)} = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]_{(b)} + [n(\bar{x}-\mu)^2]_{(c)}$$

Resultados inmediatos

Si $x_1, \dots, x_n \sim N(\mu, \sigma)$ y x_i iid, entonces:

- Si μ es conocida: $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$
- Si μ es desconocida: $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

y además: $\bar{x} \perp S^2$ (independencia estocástica)

Por identidad fundamental:

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}$$

Mini-check: Si $n = 36$ (μ *es conocida*), entonces $\frac{36S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{36}$

Puente: esta independencia es lo que permite construir la t *de Student* cuando σ^2 es desconocida

PLUS

5.2 Muestreo S^2 en población normal con σ^2 conocida

Distribución de la **varianza y cuasivarianza muestral**

Idea: si μ es conocida, podemos medir la variabilidad respecto a μ (no respecto a $\bar{x}$). En ese caso no se "pierde" el grado de libertad asociado a estimar μ.

1) Estadístico centrado en μ

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \Rightarrow \frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2$$

Lectura: aparecen n términos "libres" (no hay restricción de suma cero), por eso los g.l. son n.

2) Cuando desconocemos μ, se calcula a partir de su estimador óptimo ($\mu^* = \bar{x}$)

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \Rightarrow \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Motivo: al centrar en $\bar{x}$ se impone

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}) = 0$$

$\Rightarrow$ queda un subespacio de dimensión $n-1 \Rightarrow \chi_{n-1}^2$

CORE

Ejercicios rápidos (Sección 5.2)

Ejercicio rápido

En una población normal $x_i \sim \mathrm{N}(\mu, 200)$se realiza un $m.a.s(25)$. Se pide:

a) Calcula $\mathrm{P}(\mathrm{S}_1^2 > 50.000)$

b) Si además se sabe que $\bar{\mathrm{x}} = 2.750$ ¿cambia el resultado de (a)? Justifica en una frase

Solución

(a) Usamos (μ desconocida)

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Sustituimos $\sigma^2 = 200^2 = 40.000$, $n = 25$

$$\mathrm{P}(S_1^2 > 50.000) = P\left(\frac{24S_1^2}{40.000} > \frac{24 \cdot 50.000}{40.000}\right) = P(\chi_{24}^2 > 30) \approx 0{,}1847$$

Nota: Se deja como cola derecha a buscar en tabla/calculadora de χ_{24}^2: $1 - F_{\chi_{24}^2}(30)$

(b) **No cambia**: como $\bar{\mathrm{x}} \perp \mathrm{S}^2$, conocer $\bar{\mathrm{x}}$ no aporta información sobre S^2, sólo cambiarían los grados de libertad si se conociera μ.

CORE

5.3 Distribución de $\bar{x} - \bar{y}$ en poblaciones normales con σ^2 conocida

Distribución de la diferencia de **medias muestrales**

$\xi \sim N(\mu, \sigma)$

Estadístico: $T(X,Y) = \bar{x} - \bar{y}$

Planteamiento

Tomamos dos muestras independientes con σ_X y σ_Y conocidas:

- Población 1: $\{x_1, \dots, x_n\}$; $x_i \sim N(\mu_X, \sigma_X)$
- Población 2: $\{y_1, \dots, y_m\}$; $y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$

Tipificación (Z)

$$Z = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}$$

Resultado

$$\bar{x} - \bar{y} \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}\right)$$

Ideas clave

La diferencia $(\bar{x} - \bar{y})$ fluctúa por el muestreo en ambas poblaciones; por eso su incertidumbre combina las dos variabilidades y queda $\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}$

Ejercicios rápidos (Sección 5.3)

CORE

Ejercicio breve

Una empresa compara el gasto medio mensual (en €) en dos tipos de hogares: con hipoteca (grupo X) y sin hipoteca (grupo Y). Se sabe (por histórico) que las desviaciones típicas son $\sigma_X = 600$ y $\sigma_Y = 500$. Se toman muestras aleatorias simples independientes de tamaños n=36 y m=25 respectivamente, y se obtiene $\bar{x} = 2.900$ e $\bar{y} = 2.700$.

Pregunta

Asumiendo normalidad en las poblaciones, calcula $P(\bar{x} - \bar{y} > 200\,|\mu_x - \mu_y = 0)$

(Es decir: ¿qué probabilidad hay de observar una diferencia positiva solo por azar si en realidad no hay diferencia?)

Solución

1. Desviación estándar de $\bar{x} - \bar{y}$:

$$\sigma_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}} = \sqrt{\frac{600^2}{36} + \frac{500^2}{25}} = \sqrt{10.000 + 10.000} = \sqrt{20.000} \approx 141{,}42$$

2. Estadístico tipificado bajo $\mu_x - \mu_y = 0$:

$$Z = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - 0}{\sigma_{\bar{x}-\bar{y}}} \sim N(0{,}1)$$

3. Probabilidad:

$$P(\bar{x} - \bar{y} > 200) = P\left(Z > \frac{200}{141{,}42}\right) = P(z > 1{,}41) = 1 - P(z \leq 1{,}41) \approx 0{,}0793$$

Idea clave

El signo de $(\bar{x} - \bar{y})$ puede cambiar por azar. Z mide cuán grande es la diferencia comparada con la desviación típica de $(\bar{x} - \bar{y})$. **Conclusión:** Si $\mu_x = \mu_y$ una diferencia ≥ 200€ se observaría en torno al 7,93% de las ocasiones.

Sección 6. Muestreo en poblaciones normales con σ^2 desconocida

CORE

6.1 Distribución de $\bar{x}$ en población normal con σ^2 desconocida

Distribución de la **media muestral**

Estadístico: $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x}$

$\xi \sim N(\mu, \sigma)$

$\downarrow$

$x_i \sim N(\mu, \sigma)$

Situación

Con σ^2 conocida podíamos tipificar directamente :

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Idea clave

Si σ^2 es desconocida, necesitamos un estadístico cuya distribución no dependa de σ^2 .

Puente

En población normal, la media muestral y la varianza muestral se comportan de forma independiente (Fisher–Cochran). Esa separación permite formar un cociente cuyo resultado ya no es normal, sino: la **t de Student**, que es la herramienta estándar para trabajar con μ cuando σ^2 es desconocida.

CORE

6.1 Distribución de $\bar{x}$ en población normal con σ^2 desconocida

Distribución de la **media muestral**

Si $X_i \sim N(\mu,\sigma)$ $i.i.d$, entonces

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \;\; ; \text{U} = \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

y $Z \perp U$ (Fisher–Cochran).

La t de Student se define como

$$t_n = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2_n/n}}$$

Sustituyendo

$$\mathrm{t}_{\mathrm{n-1}} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n-1}}} = \frac{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{nS^2}{\sigma^2}/n-1}} = \frac{(\bar{x}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sqrt{\frac{(n-1)\sigma^2}{nS^2}} = \frac{(\bar{x}-\mu)}{S/\sqrt{n-1}}$$

Cuidado: Si μ es conocida entonces $\text{U} = \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$

Y por identidad

$$\frac{(\bar{x}-\mu)}{S/\sqrt{n-1}} = \frac{(\bar{x}-\mu)}{S_1/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{\mathrm{n-1}}$$

Resultado final (estadístico para calcular probabilidades)

$$\mathrm{T}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{(\bar{x}-\mu)}{S/\sqrt{n-1}} = \frac{(\bar{x}-\mu)}{S_1/\sqrt{n}} ; \boldsymbol{T(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim \mathrm{t}_{\mathrm{n-1}}}$$

Ejercicios rápidos (Sección 6.1)

CORE

Ejercicio breve

En una tienda online, el importe medio por pedido (en €) se modeliza como normal. Se toma una muestra aleatoria de n=16, y se obtiene $\bar{x} = 52$ y $S_1 = 8$ (cuasidesviación típica). **Pregunta:** Calcula $P(\bar{x} > 52 \mid \mu = 50)$

Solución (corta)

1. Estadístico t:

$$T = \frac{(\bar{x} - \mu)}{S_1/\sqrt{n}} = \frac{(52 - 50)}{8/\sqrt{16}} = \frac{2}{8/4} = \frac{2}{2} = 1$$

2. Distribución:

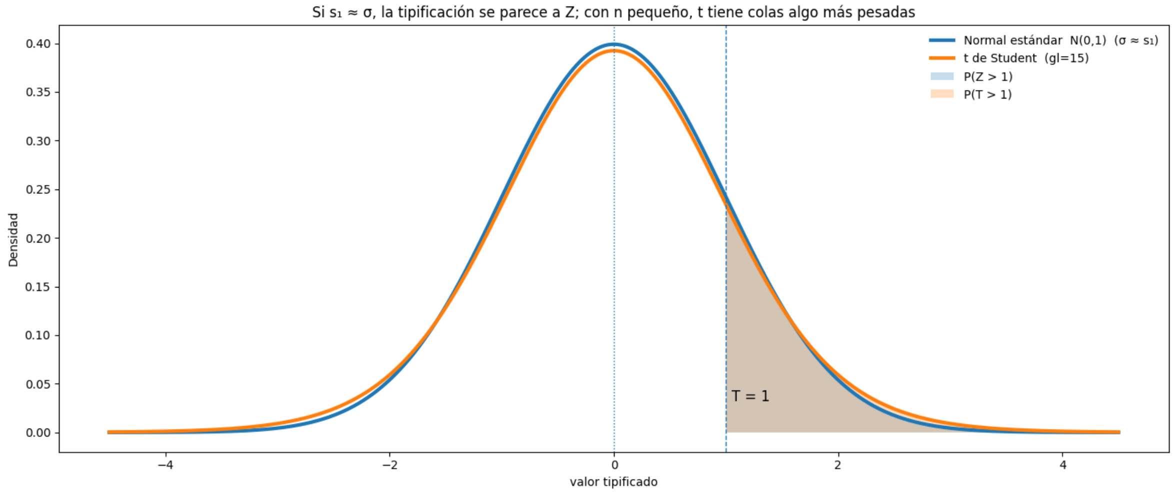
$$T \sim t_{16-1} \rightarrow gl = 15$$

3. Probabilidad:

$$P(\bar{x} > 52) = P(T > 1)$$

4. Con tabla/calculadora de t_{15} :

$$P_{t_{15}}(T > 1) \approx 0{,}166$$



Idea clave

Con n pequeño y σ desconocida, la cola es algo mayor que en la distribución normal: por eso usamos t

PLUS

6.1 (PLUS) Convergencia de t a N(0,1)

Comentario de convergencia

Comentario (convergencia de t-student a normal):

A medida que aumentan los grados de libertad, la distribución converge rápidamente a la normal estándar $N(0,1)$. En la práctica, para valores moderados de gl, las probabilidades de cola $\mathrm{P}(\mathrm{T} > \mathrm{t})$ y $\mathrm{P}(\mathrm{Z} > \mathrm{t})$ son casi iguales: la diferencia se vuelve despreciable (del orden de milésimas o menos).

Regla práctica

Con $gl > 30$, usar tabla t-student o normal suele dar resultados muy parecidos en problemas rutinarios.

Ejemplo

Para $t = 2$ y $gl = 30$, la cola derecha de la t sigue siendo algo mayor que la normal.

$$\mathrm{P}(\mathrm{t}_{30} > 2) \approx 0{,}0273 \ \ vs \quad P\left(\frac{t_{30} - 0}{\sqrt{\frac{30}{30-2}}} > 2\right) = \mathrm{P}(Z > 2) \approx 0{,}0228$$

Diferencia absoluta

$$|\mathrm{P}(\mathrm{t}_{30} > 2) - \mathrm{P}(Z > 2)| \approx 0{,}0046$$

(Esto es una diferencia del orden de la tercera cifra decimal)

PLUS

6.2.1 . Distribución de $\bar{x}$ - $\bar{y}$ con σ_x^2 y σ_y^2 desconocidas (poblaciones normales)

Comentario

Supuestos

$$\mathrm{X} = \{x_1, \ldots, x_n\} \sim N(\mu_X, \sigma_X), \mathrm{Y} = \{y_1, \ldots, y_m\} \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$$

(Muestras independientes)

Entonces

$$\bar{x} \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right), \qquad \bar{y} \sim N\left(\mu_y, \frac{\sigma_y}{\sqrt{m}}\right)$$

Por tanto

$$\bar{x} - \bar{y} \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}\right)$$

Si σ_x^2 y σ_y^2 fueran conocidas, tipificaríamos.

$$Z = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}$$

pero σ_x^2 y σ_y^2 son desconocidas y hay que construir una t.

PLUS

6.2.2 . Intento de construir una t … y dónde está el problema

Comentario

Sabemos que

$$\frac{nS_x^2}{\sigma_x^2} = \chi_{n-1}^2; \frac{mS_y^2}{\sigma_y^2} = \chi_{m-1}^2$$

En consecuencia

$$\chi_{m+n-2}^2 = \frac{nS_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{mS_y^2}{\sigma_y^2}$$

Al construir la t

$$t_{m+n-2} = \frac{Z}{\sqrt{\chi_{m+n-2}^2/(m+n-2)}} = \frac{\dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n}+\dfrac{\sigma_y^2}{m}}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{nS_x^2}{\sigma_x^2}+\dfrac{mS_y^2}{\sigma_y^2}}{m+n-2}}}$$

Problema:

Las dos χ^2 están escaladas por varianzas distintas σ_x^2 y σ_y^2. Al sustituir en la construcción de la t, **no se cancela una única σ^2** común. (no ocurre lo mismo que con una sola muestra)

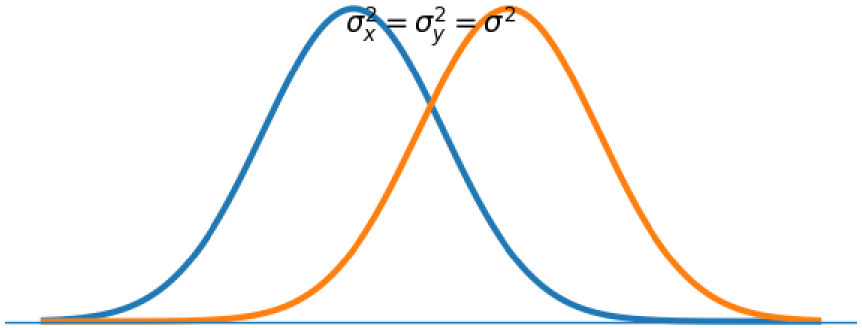
CORE

6.2.3 . Caso especial que si funciona $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ (usando s^2)

(varianzas desconocidas pero iguales)

Si asumimos

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$$



Al construir el pivote T

$$T_{m+n-2} = \frac{\dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}+\dfrac{\sigma^2}{m}}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{nS_x^2}{\sigma^2}+\dfrac{mS_y^2}{\sigma^2}}{m+n-2}}} = \frac{[(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)]}{\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}\sqrt{\dfrac{nS_x^2+mS_y^2}{m+n-2}}} \sim t_{m+n-2}$$

(esta es la “correspondencia aleatoria” que luego se usa para calcular probabilidades)

CORE

6.2.4 . Caso especial que si funciona $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ (usando s_1^2)

(varianzas desconocidas pero iguales)

Relación con varianza muestral

$$(\mathrm{n}-1)\mathrm{S}_{1\mathrm{x}}^2 = ns_x^2 \ ; \ (m-1)s_{1y}^2 = ms_y^2$$

Por tanto

$$\frac{nS_x^2 + mS_y^2}{m+n-2} = \frac{(\mathrm{n}-1)\mathrm{S}_{1\mathrm{x}}^2 + (m-1)S_{1y}^2}{m+n-2} =: \boldsymbol{S_p^2}$$

Al construir el estadístico T

$$T = \frac{(\bar{x}-\bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t_{m+n-2}$$

(Es exactamente lo mismo, solo cambia el divisor con el que calculas la dispersión)

Ejercicio breve (Sección 6.2)

CORE

Enunciado

Dos cadenas de supermercados comparan el gasto medio por compra (en €) en dos ciudades. Se toman muestras independientes de tamaños n=m=125, y se obtiene $\bar{x}-\bar{y}=50$, $S_x=300$ y $S_y=250$ (desviaciones típicas muestrales, varianzas desconocidas). Suponemos $\sigma_x^2=\sigma_y^2$ **Pregunta:** Calcula $P(\bar{x}-\bar{y}>50 \mid \mu_x-\mu_y=0)$

Solución (corta)

1. Varianza combinada de varianzas muestrales:

$$S_p^2=\frac{nS_x^2+mS_y^2}{m+n-2}=\frac{125*300^2+125*250^2}{248}\approx 76.864{,}92$$

2. Desviación estándar de $\bar{x}-\bar{y}$:

$$S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}=277{,}25\sqrt{\frac{1}{125}+\frac{1}{125}}=277{,}25\sqrt{0{,}016}\approx 35{,}07$$

3. Estadístico:

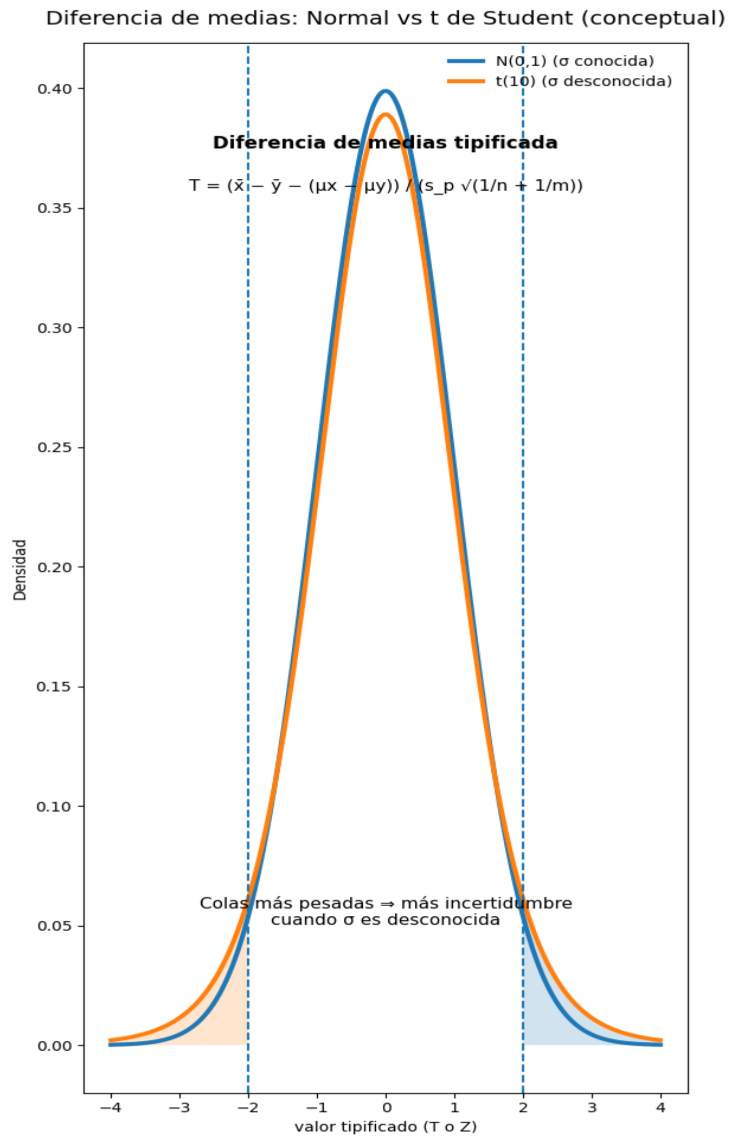
$$T=\frac{(\bar{x}-\bar{y})-0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}=\frac{50}{35{,}07}=1{,}43\,;T\sim t_{248}$$

4. Probabilidad :

$$P(\bar{x}-\bar{y}>50 \mid \mu_x-\mu_y=0)=$$
$$P(T>1{,}43)\approx 0{,}077$$

CORE

6.2.5. Resumiendo



- **Supuesto:** $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ (varianzas desconocidas pero iguales).
- **Varianza combinada** (*pooled*):

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_{1x}^2 + (m-1)S_{1y}^2}{m+n-2} \quad vs \quad S_p^2 = \frac{nS_x^2 + mS_y^2}{m+n-2}$$

- **Desviación típica** de $(\bar{x} - \bar{y})$

$$SD(\bar{x} - \bar{y}) = S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$$

- **Estadístico final**:

$$T = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}$$

- **Mini-check**: "$gl = n + m - 2$"

ANEXO

6.2.5 Welch: cuando no podemos suponer $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ (ANEXO)

(varianzas desconocidas)

Fundamento

En el caso general $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ la dispersión de $\bar{x} - \bar{y}$ depende de dos varianzas distintas:

$$V(\bar{x} - \bar{y}) = \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}$$

Como σ_x^2 y σ_y^2 son desconocidas, las sustituimos por S_{1x}^2 y S_{1y}^2. El resultado ya no da una t con $n + m - 2$, pero Welch aproxima muy bien la distribución con una t usando grados de libertad efectivos

Estadístico de Welch

$$T = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{S_{1x}^2}{n} + \frac{S_{1y}^2}{m}}}$$

Grados de libertad (aprox. Welch–Satterthwaite)

$$gl = \frac{\left(\frac{S_{1x}^2}{n} + \frac{S_{1y}^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_{1x}^2}{n}\right)^2}{n-1} + \frac{\left(\frac{S_{1y}^2}{m}\right)^2}{m-1}}$$

Resultado operativo

$$T \sim t_{gl\ (aprox)}$$

CORE

Ejercicios rápidos (Sección 6)

Test 1

Tenemos $x_1, \dots, x_n \sim N(\mu, \sigma)$ con σ^2 desconocida. Queremos calcular probabilidades sobre $\bar{x}$ (por ej. $P(\bar{x} > c)$. ¿Qué estadístico y qué distribución usamos?

a) $T = \dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t_{m+n-2}$

b) $T = \dfrac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n}}{S_1} \sim t_{n-1}$

c) $\dfrac{nS_x^2}{\sigma_x^2} = \chi_{n-1}^2$

d) $\dfrac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \chi_{n-1}^2$

CORE

Ejercicios rápidos (Sección 6)

Test 1

Tenemos $x_1, \dots, x_n \sim N(\mu, \sigma)$ con σ^2 desconocida. Queremos calculas probabilidades sobre $\bar{x}$ (por ej. $P(\bar{x} > c)$. ¿Qué estadístico y qué distribución usamos?

a) $T = \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t_{m+n-2}$

b) $T = \frac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n}}{S_1} \sim t_{n-1}$

c) $\frac{nS_x^2}{\sigma_x^2} = \chi^2_{n-1}$

d) $\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \chi^2_{n-1}$

Respuesta correcta: B

(s_1 es la cuasidesviación típica, con divisor $n-1$; los grados de libertad son $n-1$.

Ejercicios rápidos (Sección 6)

Test 2 (anexo)

Dos muestras independientes de poblaciones normales, con σ_x^2, σ_y^2 desconocidas. Si no asumimos varianzas iguales, el procedimiento estándar es:

a) Usar t_{n+m-2} con varianza combinada S_p^2.
b) Usar una normal estándar $N(0,1)$ porque n y m suelen ser grandes.
c) Usar el estadístico de Welch con grados de libertad aproximados (Welch–Satterthwaite)
d) Usar una χ^2 con $n+m-2$ grados de libertad

Ejercicios rápidos (Sección 6)

Test 2 (anexo)

Dos muestras independientes de poblaciones normales, con σ_x^2, σ_y^2 desconocidas. Si no asumimos varianzas iguales, el procedimiento estándar es:

a) Usar t_{n+m-2} con varianza combinada S_p^2.
b) Usar una normal estándar $N(0,1)$ porque n y m suelen ser grandes.
c) Usar el estadístico de Welch con grados de libertad aproximados (Welch–Satterthwaite)
d) Usar una χ^2 con $n+m-2$ grados de libertad

Respuesta correcta: C

Ejercicios rápidos (Sección 6)

CORE

Test 3

Dos muestras independientes normales con varianzas desconocidas, pero se supone $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$. Para tipificar la diferencia de medias muestrales $(\bar{x} - \bar{y})$ y poder calcular probabilidades (por ej. $P(\bar{x} - \bar{y} > c)$), ¿qué estadístico y qué distribución usamos?

a) $T = \dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t_{m+n-2}$

b) $Z = \dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{m}}} \sim N(0,1)$

c) $\dfrac{(n+m-2)S_p^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n+m-2}$

d) $T = \dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{S_p} \sim t_{n-1}$

Ejercicios rápidos (Sección 6)

CORE

Test 3

Dos muestras independientes normales con varianzas desconocidas, pero se supone $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$. Para tipificar la diferencia de medias muestrales $(\bar{x} - \bar{y})$ y poder calcular probabilidades (por ej. $P(\bar{x} - \bar{y} > c)$), ¿qué estadístico y qué distribución usamos?

a) $T = \dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t_{m+n-2}$

b) $Z = \dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{m}}} \sim N(0,1)$

c) $\dfrac{(n+m-2)S_p^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n+m-2}$

d) $T = \dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{S_p} \sim t_{n-1}$

Respuesta correcta: A

($gl = n + m - 2$; aparece la varianza combinada s_p^2)

CORE

Ejercicios rápidos (Sección 6)

Test 4

¿ Qué relación es correcta?

a) $(n-1)S^2 = nS_1^2$

b) $nS^2 = (n-1)S_1^2$

c) $nS_1^2 = (n-1)S^2$

d) $S^2 = S_1^2$

CORE

Ejercicios rápidos (Sección 6)

Test 4

¿Qué relación es correcta?

a) $(n-1)S^2 = nS_1^2$

b) $nS^2 = (n-1)S_1^2$

c) $nS_1^2 = (n-1)S^2$

d) $S^2 = S_1^2$

Respuesta correcta: B

Ambas multiplicadas por su divisor dan $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

Sección 7. Muestreo de proporciones en poblaciones Bernoulli–Binomial.

CORE

7.1 Distribución de p en población Binomial

$\xi \sim B(1,\pi)$

Modelo (Bernoulli)

$\xi \sim B(1,\pi) \rightarrow P(\xi = 1) = \pi, P(\xi = 0) = 1 - \pi$

Interpretación típica: $\xi = 1$ "éxito" (p. ej., "compra", "aprueba", "apoya", "elige opción A").

Muestra

$$\xi_1, \dots, \xi_n \; iid \sim B(1,\pi)$$

Número de éxitos

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sim B(n,\pi)$$

Proporción muestral

$$p = \frac{X}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

Media y varianza de p

$$\mathrm{E(p)} = \pi \,;\, \mathrm{V(p)} = \frac{\pi\,(1-\pi)}{n}$$

(desviación estándar de p es $\sqrt{\pi\,(1-\pi)/n}$)

Distribución de p con n grande

$$p \approx N\left(\pi, \sqrt{\frac{\pi\,(1-\pi)}{n}}\right)$$

(X es binomial; p es un *promedio de ceros y unos* y, con n grande, se aproxima por una normal)

Condición práctica habitual

$\mathrm{n\pi}$ y $\mathrm{n(1-\pi)}$ "no pequeños" (para evitar colas raras)

$$\mathrm{n\pi} \geq 10 \;\; \mathrm{y} \;\; \mathrm{n(1-\pi)} \geq 10$$

Ejercicios (Sección 7)

CORE

Enunciado

En una encuesta rápida, la proporción real de hogares que ahorra al menos 100 € al mes es $\pi = 0{,}4$. Se encuesta a $n = 200$ hogares (seleccionados por m.a.s.). Sea p la proporción muestral.

Pregunta: Calcula aproximadamente $P(p > 0{,}45)$

Solución

1. Comprobación de "no pequeños":

$$n\pi = 200 \cdot 0{,}4 = 80 \geq 10, n(1-\pi) = 200 \cdot 0{,}6 = 120 \geq 10$$

(la aproximación normal es razonable)

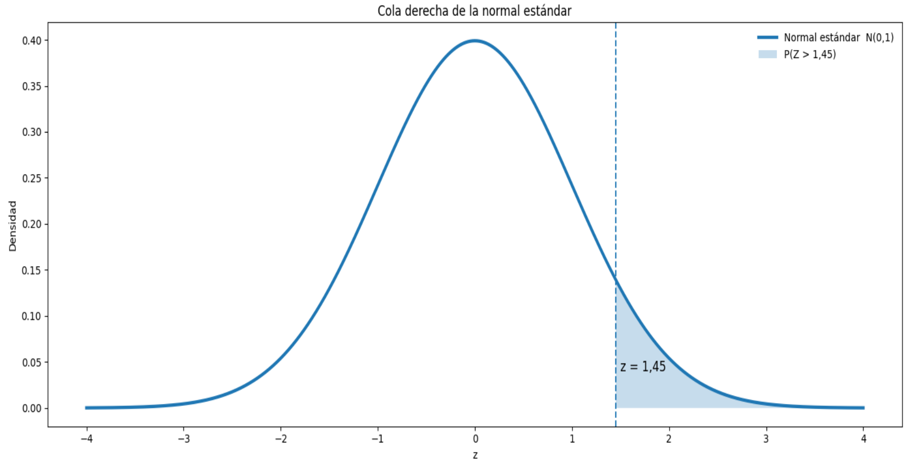
2. Distribución aproximada

$$p \approx N\left(\pi, \sqrt{\frac{\pi\,(1-\pi)}{n}}\right) = N\left(0{,}4, \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{200}}\right) = N\left(0{,}4, \sqrt{0{,}0012}\right)$$

$$\approx N(0{,}4;\ 0{,}0346)$$

3. Tipificación/valor

$$P(p > 0{,}45) \approx P\left(z > \frac{0{,}45 - 0{,}4}{0{,}0346}\right) = P(z > 1{,}45) \approx 0{,}0735$$



Comentario

Aunque $\pi = 0{,}4$ con $n = 200$ no es raro ver p alrededor de 0,45 pero ya cae en una cola del 7–8%."

7.2 Distribución de la diferencia de proporciones muestrales $\mathbf{p_x - p_y}$

CORE

Modelo (dos poblaciones Bernoulli)

- Poblacion X: $\xi \sim B(1, \pi_x)$
- Poblacion Y: $\eta \sim B(1, \pi_y)$

Muestras independientes

$\xi_1, \dots, \xi_n \; iid \sim B(1, \pi_x), \eta_1, \dots, \eta_m \; iid \sim B(1, \pi_y)$

Proporciones muestrales

$$p_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \,, \qquad p_y = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} \eta_j$$

La diferencia de dos proporciones es la diferencia de dos promedios de {0,1}; con tamaños grandes se aproxima por una normal y las varianzas se suman

Media y varianza de $\mathbf{p_x - p_y}$

$$\mathrm{E}(\mathrm{p_x} - \mathrm{p_y}) = \pi_\mathrm{x} - \pi_\mathrm{y}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{p_x} - \mathrm{p_y}) = \frac{\pi_\mathrm{x}\,(1 - \pi_x)}{n} + \frac{\pi_\mathrm{y}\,(1 - \pi_y)}{m}$$

(independencia entre muestras)

Distribución de $\boldsymbol{p}$ con $\boldsymbol{n}$ grande

$$\mathrm{p_x} - \mathrm{p_y} \approx N\left(\pi_\mathrm{x} - \pi_\mathrm{y}, \sqrt{\frac{\pi_\mathrm{x}\,(1 - \pi_x)}{n} + \frac{\pi_\mathrm{y}\,(1 - \pi_y)}{m}}\right)$$

Condición práctica (“no pequeños”)

$$\mathrm{n}\pi_x \geq 10, \qquad \mathrm{n}(1 - \pi_\mathrm{x}) \geq 10,$$
$$\mathrm{m}\pi_y \geq 10, \qquad \mathrm{m}(1 - \pi_\mathrm{y}) \geq 10$$

(umbral 10 como versión segura)

Ejercicios (Sección 7)

CORE

Enunciado

Dos plataformas de streaming comparan la proporción de usuarios que renuevan la suscripción: en la plataforma X se observa $\pi_x = 0{,}4$ y en la plataforma Y, $\pi_y = 0{,}35$. Se encuesta a $n = 200$ para X y $m = 180$ para Y).

Pregunta: Calcula aproximadamente $P\left(p_x - p_y > 0{,}08\right)$

Solución

1. Comprobación de "no pequeños":

$$n\pi_x = 80, n(1-\pi_x) = 120,$$
$$m\pi_y = 63, m\left(1-\pi_y\right) = 117\ (\geq 10)$$

(la aproximación normal es razonable)

2. Aproximación normal:

$$p_x - p_y \approx N\left(\pi_x - \pi_y, \sqrt{\frac{\pi_x\,(1-\pi_x)}{n} + \frac{\pi_y\,(1-\pi_y)}{m}}\right)$$
$$= N(\mu_d, \sigma_d)$$

$$\mu_d = \pi_x - \pi_y = 0{,}05$$

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{0{,}4\ \cdot 0{,}6}{200} + \frac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{180}} =$$
$$= \sqrt{0{,}0012 + 0{,}0012639} = \sqrt{0{,}0024639} \approx 0{,}0496$$

3. Tipificación/valor

$$P(p_x - p_y > 0{,}08) \approx P\left(z > \frac{0{,}08 - 0{,}05}{0{,}0496}\right)$$
$$= P(z > 0{,}6) \approx 0{,}2743$$

CORE

Ejercicios rápidos (Sección 7)

Test 1

Sean dos muestras independientes: $m.a.s(n)\ sobre\ \xi_i \sim B(1, \pi_x)$, y $m.a.s(m)\ sobre\ \eta_j \sim B(1, \pi_y)$.
¿Cuál es la media y la varianza correctas de $p_x - p_y$?

a) $E(p_x - p_y) = 0, \qquad V(p_x - p_y) = \frac{\pi_x(1-\pi_x)+\pi_y(1-\pi_y)}{n+m}$

b) $E(p_x - p_y) = \pi_x - \pi_y, \quad V(p_x - p_y) = \frac{\pi_x(1-\pi_x)}{n} + \frac{\pi_y(1-\pi_y)}{m}$

c) $E(p_x - p_y) = \pi_x - \pi_y, \quad V(p_x - p_y) = \frac{\pi_x(1-\pi_x)}{n} - \frac{\pi_y(1-\pi_y)}{m}$

d) $E(p_x - p_y) = \pi_x + \pi_y, \quad V(p_x - p_y) = \frac{\pi_x(1-\pi_x)}{n} + \frac{\pi_y(1-\pi_y)}{m}$

CORE

Ejercicios rápidos (Sección 7)

Test 1

Sean dos muestras independientes: $m.a.s(n)\ sobre\ \xi_i \sim B(1, \pi_x)$, y $m.a.s(m)\ sobre\ \eta_j \sim B(1, \pi_y)$.
¿Cuál es la media y la varianza correctas de $p_x - p_y$?

a) $\mathrm{E}(\mathrm{p_x} - \mathrm{p_y}) = 0,\quad \mathrm{V}(\mathrm{p_x} - \mathrm{p_y}) = \frac{\pi_x(1-\pi_x)+\pi_y(1-\pi_y)}{n+m}$

b) $\mathrm{E}(\mathrm{p_x} - \mathrm{p_y}) = \pi_x - \pi_y,\quad \mathrm{V}(\mathrm{p_x} - \mathrm{p_y}) = \frac{\pi_x(1-\pi_x)}{n} + \frac{\pi_y(1-\pi_y)}{m}$

c) $\mathrm{E}(\mathrm{p_x} - \mathrm{p_y}) = \pi_x - \pi_y,\quad \mathrm{V}(\mathrm{p_x} - \mathrm{p_y}) = \frac{\pi_x(1-\pi_x)}{n} - \frac{\pi_y(1-\pi_y)}{m}$

d) $\mathrm{E}(\mathrm{p_x} - \mathrm{p_y}) = \pi_x + \pi_y,\quad \mathrm{V}(\mathrm{p_x} - \mathrm{p_y}) = \frac{\pi_x(1-\pi_x)}{n} + \frac{\pi_y(1-\pi_y)}{m}$

Respuesta correcta: B

CORE

Ejercicios rápidos (Sección 7)

Test 2

Para aproximar $p_x - p_y$ por una normal, una condición práctica “segura” es exigir que en ambos grupos haya éxitos y fracasos esperados suficientes. ¿Cuál es la condición correcta?

a) $\mathrm{n}\pi_{\mathrm{x}} \geq 10$ y $\mathrm{m}\pi_{\mathrm{y}} \geq 10$ (solo éxitos)

b) $\mathrm{n}\pi_{\mathrm{x}} \geq 10, \mathrm{n}(1-\pi_{\mathrm{x}}) \geq 10, \mathrm{m}\pi_{\mathrm{y}} \geq 10, , \mathrm{m}(1-\pi_{\mathrm{y}}) \geq 10$

c) $n + m \geq 30$

d) $\pi_{\mathrm{x}} = \pi_{\mathrm{y}}$

CORE

Ejercicios rápidos (Sección 7)

Test 2

Para aproximar $p_x - p_y$ por una normal, una condición práctica "segura" es exigir que en ambos grupos haya éxitos y fracasos esperados suficientes. ¿Cuál es la condición correcta?

a) $\mathrm{n}\pi_\mathrm{x} \geq 10$ y $\mathrm{m}\pi_\mathrm{y} \geq 10$ (solo éxitos)

b) $\mathrm{n}\pi_\mathrm{x} \geq 10, \mathrm{n}(1-\pi_\mathrm{x}) \geq 10, \mathrm{m}\pi_\mathrm{y} \geq 10, \mathrm{m}(1-\pi_\mathrm{y}) \geq 10$

c) $n + m \geq 30$

d) $\pi_\mathrm{x} = \pi_\mathrm{y}$

Respuesta correcta: B

CORE

8. Resumen de Tema Estadísticos y sus distribuciones (1/2)

- **Idea central**: de una población tomamos una muestra y calculamos un estadístico; ese estadístico cambia de muestra a muestra → tiene distribución en el muestreo.
- **Objetivo operativo**: saber qué distribución tiene cada estadístico para poder calcular probabilidades (y preparar IC/contrastes).
- **Normal (población normal):**
  - $\bar{x}$ es normal.
  - La variabilidad muestral alrededor de $\bar{x}$ genera una χ^2_{n-1} ($n-1$ grados de libertad)
  - Bajo normalidad: $\bar{x} \perp S^2$ (idea Fisher–Cochran: "nivel (posición)" y "dispersión (variabilidad)" se separan).
- Cuando $\boldsymbol{\sigma^2}$ **es desconocida**: la tipificación "natural" lleva a la t de Student

CORE

8. Resumen de Tema Estadísticos y sus distribuciones (2/2)

- **Dos muestras normales :**
  - Con varianzas conocidas → tipificación normal (Z).
  - Con varianzas desconocidas→ t; si, además $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ aparece la varianza combinada S_p^2 y $gl = n + m - 2$.
  - Bajo normalidad: $\bar{x} \perp S^2$ (idea Fisher–Cochran: “nivel (posición)” y “dispersión (variabilidad)” se separan). (Welch como alternativa si no se asume igualdad).
- **Proporciones (Bernoulli/Binomial):** p es el promedio de $\{0,1\}$ → para n grande p y $(p_x - p_y)$ se aproximan por una normal si hay suficientes éxitos y fracasos esperados.

CORE

10. Tabla resumen: fórmulas clave (1/2)

(distribución en el muestreo)

Contexto (CORE)	Estadístico / distribución clave	Tipificación útil
Normal, σ conocida	$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
Normal, σ conocida	$\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$	$(\text{equiv.})\ \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$
Normal (propiedad clave)	$\bar{x} \perp s^2$ (y tambien $\bar{x} \perp s_1^2$)	Base del salto a t
Dos normales, σ_x^2, σ_y^2 conocidas	$\bar{x} - \bar{y} \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}\right)$	$z = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} \sim N(0,1)$

10. Tabla resumen: fórmulas clave (2/2)

CORE

(distribución en el muestreo)

Contexto (CORE)	Estadístico / distribución clave	Tipificación útil
Normal, σ desconocida	$T=\dfrac{\bar{x}-\mu}{s_1/\sqrt{n}}\sim t_{n-1}$	$t_{n-1}\ (tablas)$
Dos normales, $\sigma_x^2=\sigma_y^2$ desconocidas (varianza común)	$S_p^2=\dfrac{nS_x^2+mS_y^2}{m+n-2}=\dfrac{(n-1)S_{1x}^2+(m-1)S_{1y}^2}{m+n-2}$	$T=\dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\sim t_{m+n-2}$
(ANEXO) Welch ($\sigma_x^2\neq\sigma_y^2$)	$T=\dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{S_{1x}^2}{n}+\frac{S_{1y}^2}{m}}}$	$T\sim t_{gl\_aprox}\quad (Welch\text{–}Satterthwaite)$
Proporción (Bernoulli/Binomial) (condición de "≥ 10")	$p\sim N\left(\pi,\sqrt{\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}}\right)$	$z=\dfrac{p-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}\sim N(0,1)$
Proporción (Bernoulli/Binomial) (condición en ambas distribuciones de "≥ 10")	$(p_x-p_y)\sim N\left(\pi_x-\pi_y,\sqrt{\dfrac{\pi_x(1-\pi_x)}{n}+\dfrac{\pi_y(1-\pi_y)}{m}}\right)$	$z=\dfrac{(p_x-p_y)-(\pi_x-\pi_y)}{\sqrt{\frac{\pi_x(1-\pi_x)}{n}+\frac{\pi_y(1-\pi_y)}{m}}}\sim N(0,1)$

Bibliografía

- **Ruiz-Maya, L., Martín-Pliego López, F. J. (3.ª ed.). Fundamentos de Inferencia Estadística. Thompson–Paraninfo.**
- Casella, G., & Berger, R. L. (2002). Statistical Inference (2nd ed.). Duxbury/Thomson Learning.
- DeGroot, M. H., & Schervish, M. J. (2012). Probability and Statistics (4th ed.). Pearson.
- Gosset, W. S. ("Student"). (1908). The probable error of a mean. Biometrika, 6(1), 1–25.
- Cochran, W. G. (1934). The distribution of quadratic forms in a normal system, with applications to the analysis of covariance. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 30(2), 178–191.
- Welch, B. L. (1947). The generalization of "Student's" problem when several different population variances are involved. Biometrika, 34(1–2), 28–35.

Anexo. Tablas de distribuciones y áreas

$(\mathbf{N}(0,1), \chi^2, t\ de\ Student, y\ F\ de\ Fischer - Snedecor)$

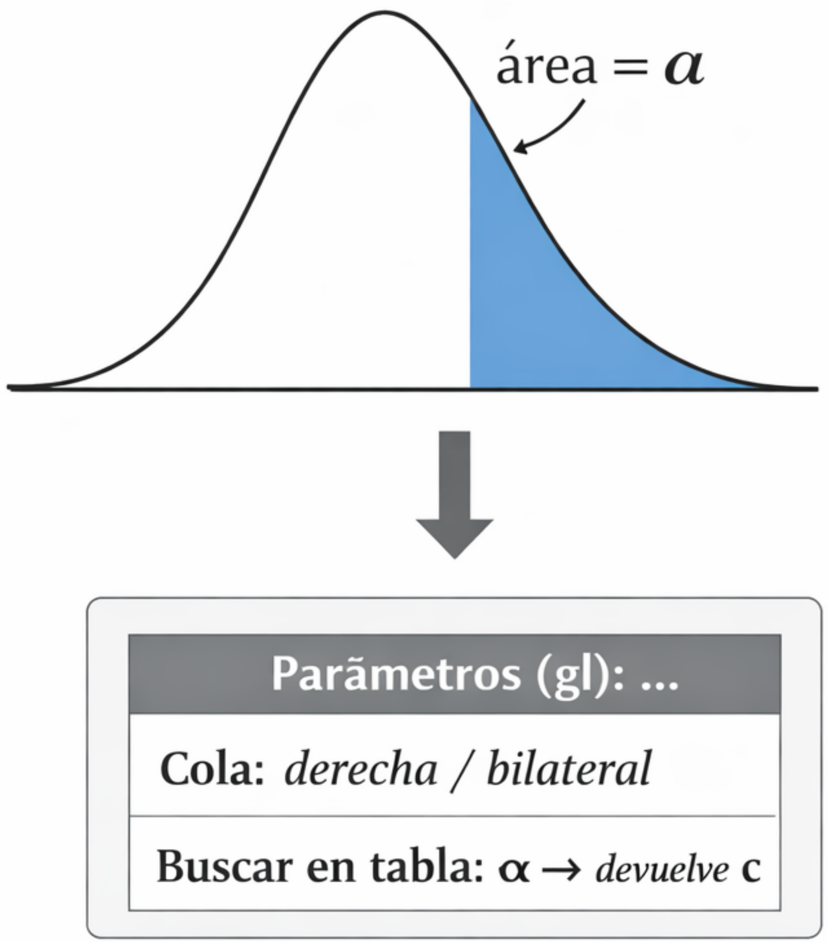
A0. Cómo usar una tabla de distribución (visión genérica)

CORE

- **Dos tareas típicas**
  - **Probabilidad (área):** $P(X \leq x), P(X > x), P(a < X < b)$
  - **Valor crítico (cuantil):** encontrar c tal que $P(X>c)=\alpha$

- **Paso 1 — Identifica la distribución y parámetros**
  - Normal estándar $N(0,1)$: sin parámetros adicionales (no gl).
  - χ^2_ν, t_ν: $\nu =$ grados de libertad.
  - F_{d_1,d_2}: d_1 (numerador), d_2(denominador)
- **Paso 2 — Asegura la cola**
  - Cola **derecha**: $P(X > c) = \alpha$ | Cola **izquierda**: $P(X < c) = \alpha$
  - **Bilateral**: reparte $\alpha/2$ en cada cola
- **Paso 3 — Traduce el problema a "celda de tabla"**
  - Tablas pueden dar $\Phi(z)$ Normal o cuantiles (t, χ^2, F)

- **Trucos rápidos:**
  - **Normal y t: simetría** $P(X < -c) = P(X > c)$
  - **F: reciprocidad** $P(X < c)$ usando $1/F$ e intercambio de gl

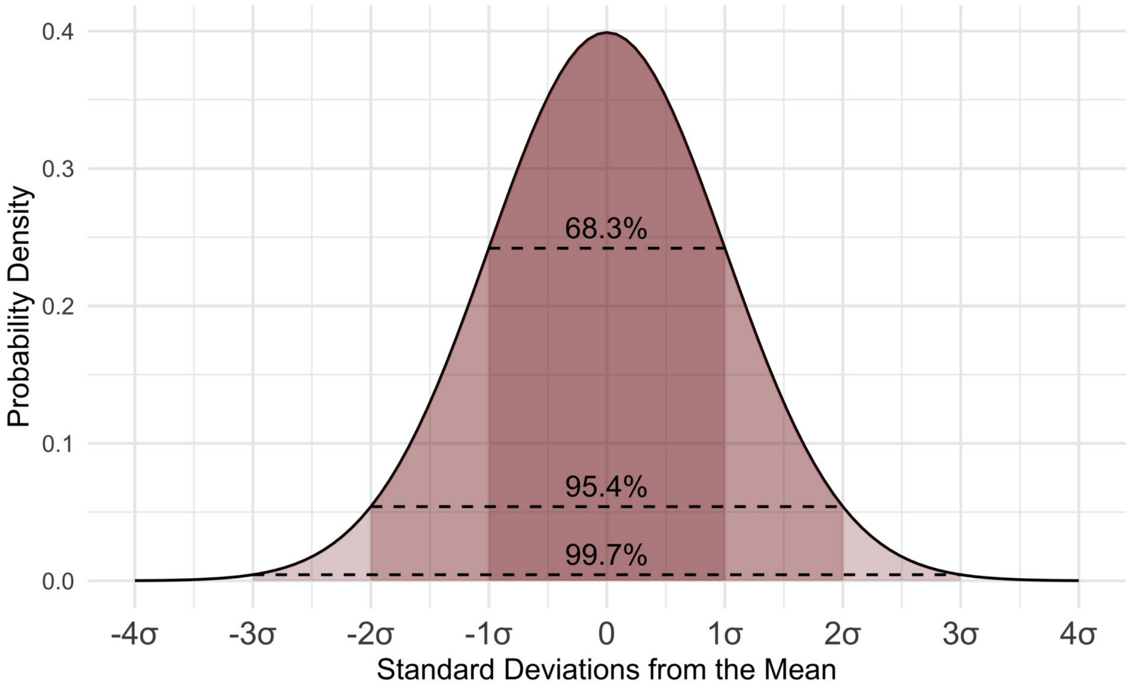


La tabla conecta **área** ↔ valor crítico.

A1. Normal estándar $\mathbf{N(0,1)}$: áreas y tabla $\boldsymbol{\phi(z)}$

CORE

- **Qué es**
  - $Z \sim N(0,1)$: media 0 y desviación típica 1.
  - Cualquier $X \sim N(\mu, \sigma)$ se tipifica como
    $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
- **Para qué se usa**
  - Calcular probabilidades y valores críticos cuando el estadístico es normal.
  - Aproximaciones (cuando procede) y contraste con σ conocida
- **Qué devuelve la tabla**
  - La mayoría de las tablas dan $\phi(z) = P(Z \leq z)$
- **Cómo obtener otras probabilidades**
  - **Cola derecha**: $P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z)$
  - **Simetría**: $P(Z \leq -z) = P(Z \geq z)$
  - **Bilateral**: $P(|Z| > z) = 2[1 - P(Z \leq z)]$



Distribución normal estándar con áreas sombreadas (CC BY-SA 4.0), fuente: Wikimedia Commons.

Ejemplo rápido (1 línea):

- **Cola derecha**: $P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) \approx 0{,}0228$

A2. Chi-cuadrado χ^2_ν varianza muestral y tablas (cola derecha)

CORE

- **De dónde sale (en muestreo normal)**
  - Si $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, entonces

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} = \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

- **Para qué se usa**
  - Intervalos de confianza y contrastes sobre la varianza poblacional σ^2
  - Probabilidades para S_1^2 y S^2 con σ^2 conocida

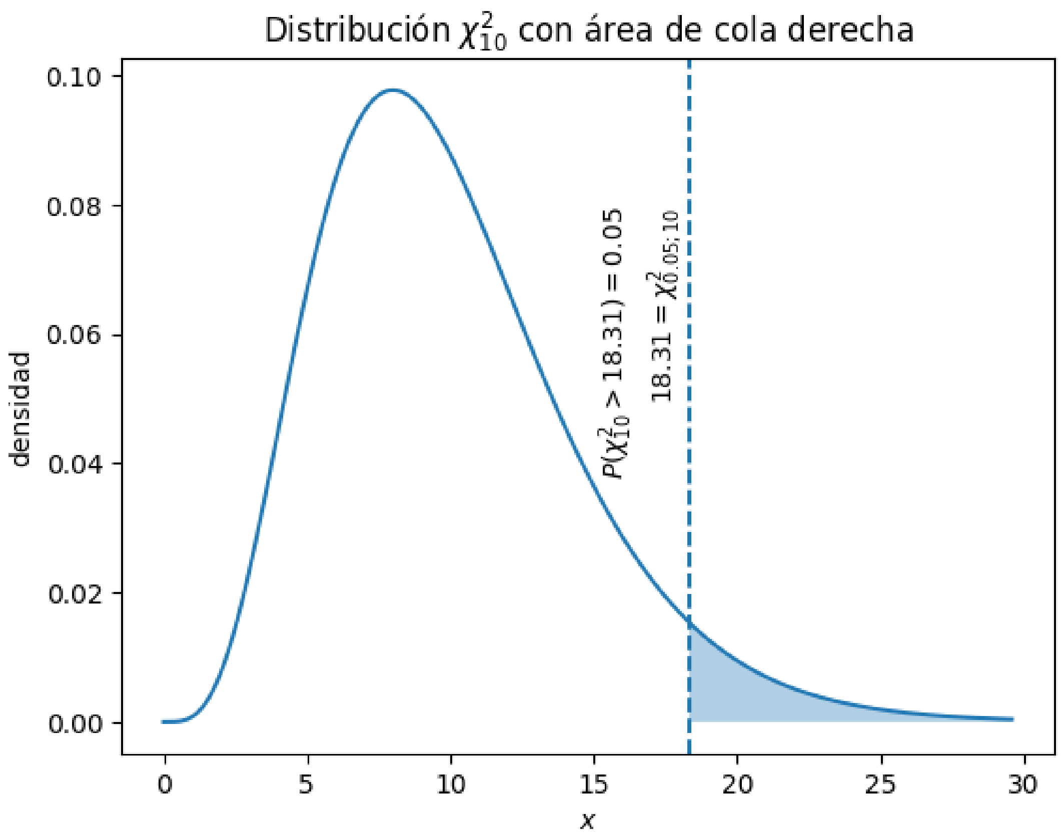
- **Qué devuelve la tabla (lo más habitual)**

$$P\left(\chi^2_\nu > c\right) = \alpha \ (cola\ derecha)$$

  - **Entrada típica: fila** = ν, **columna** = α

- **Cómo se usa en bilateral (idea)**
  - Reparte $\alpha/2$ en cada cola → necesitas dos valores críticos

- **Error típico**
  - Confundir si la tabla está definida por cola derecha o por cola izquierda



Ejemplo rápido (1 línea):

$$P\left(\chi^2_{10} > 18{,}31\right) = 0{,}05 \ \rightarrow 18{,}31 = \chi^2_{0{,}05;10}$$

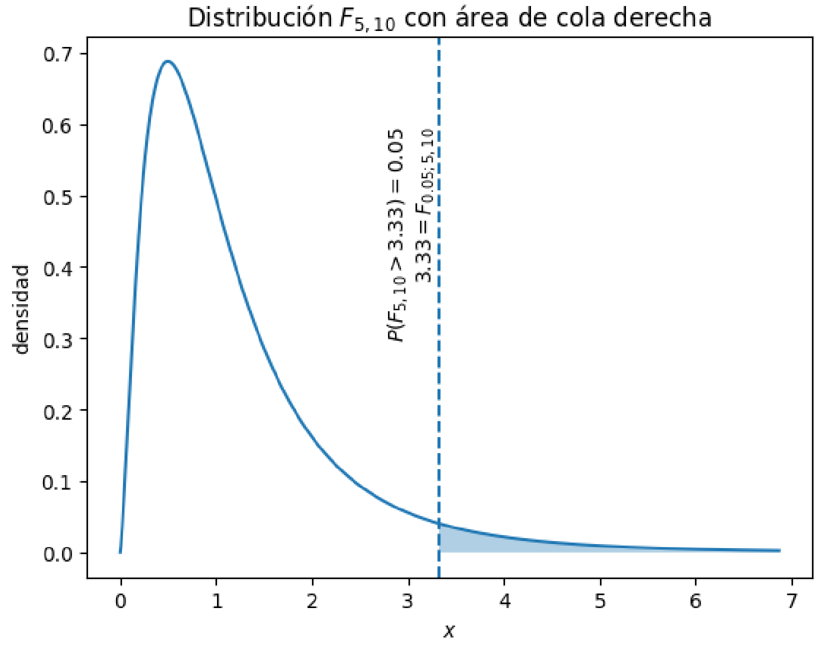
A3. F de Fisher–Snedecor F_{d_1,d_2}: cociente de varianzas

CORE

- **De dónde sale (en muestreo normal)**
  Si $U_1 \sim \chi^2_{d_1}$ y $U_2 \sim \chi^2_{d_2}$ son independientes

$$F = \frac{U_1/d_1}{U_2/d_2} \sim F_{d_1,d_2}$$

- **Para qué se usa**
  - Contrastes e intervalos de confianza sobre cocientes de varianzas
  - Estadístico clave en ANOVA
- **Qué devuelve la tabla (lo más habitual)**
  - Valor crítico $F_{\alpha;\, d_1,d_2}$ tal que
    $$F\left(F_{d_1,d_2} > F_{\alpha;\, d_1,d_2}\right) = \alpha\ (cola\ derecha)$$
  - **Entrada típica: fila** $= d_1$, **columna** $= d_2$ (según la convención de la tabla)
- **Propiedad clave:**
  - No es simétrica y solo toma valores positivos
  - Cola izquierda usando reciprocidad:
    $$F\left(F_{d_1,d_2} < c\right) = F\left(F_{d_2,d_1} > 1/c\right)$$
- **Error típico**: Intercambiar d_1 y d_2 (numerador ↔ denominador)



Ejemplo rápido (1 línea):
$P\left(F_{5,10} > 3{,}33\right) = 0{,}05 \ \rightarrow 3{,}33 = F_{0{,}05;\, 5{,}10}$

Recursos

Bibliografía:

- **Ruiz-Maya, L., Martín-Pliego López, F. J. (3.ª ed.). Fundamentos de Inferencia Estadística. Thompson–Paraninfo.**
- **StatsCalculators — Statistical Tables:**
  - Normal estándar, t de Student, Chi-cuadrado y F de Fisher–Snedecor
  - https://www.statscalculators.com/resources/statistical-tables?utm_source=chatgpt.com

  (recurso externo; enlace informativo)

Atribuciones y transparencia:

- **Gráficas** de este anexo: generadas con Python (SciPy/Matplotlib) con apoyo de ChatGPT.
- **Imágenes externas**: cuando se incluyen, se usan bajo licencia CC-BY / CC-BY-SA, citadas individualmente.