Universidad Rey Juan Carlos

Facultad de Ciencias de la Economía y de la Empresa

Estadística II

Tema 6-7-8 GD. Contrastes de hipótesis: fundamentos y contrastes paramétricos

Facultad de Ciencias de la Economía y de la Empresa (FCEE)

Curso 2025–2026 · 4.5 ECTS · 2º cuatrimestre

Francisco Rabadán Pérez, Raquel Ibar-Alonso y Ester Muñoz Céspedes

Departamento de Economía Aplicada I e Historia e Instituciones Económicas

Tema 1 · Objetivo

Al terminar este tema podrás:

- Entender la **lógica de un contraste de hipótesis** (H_0 , H_1, región crítica, nivel de significación y potencia).
- Interpretar correctamente los errores de decisión (tipo I y tipo II).
- Aplicar la mecánica general de resolución de un contraste paramétrico.
- Seleccionar y usar los contrastes paramétricos básicos (z, t, χ^2 y F) en contextos económicos.

Cómo leer estas etiquetas

CORE PLUS ANEXO

CORE: ideas y procedimientos que sostienen el curso entero y que se practican de forma recurrente.

PLUS: material para profundizar o reforzar intuición; ayuda a consolidar.

ANEXO: material de referencia/consulta.

Universidad Rey Juan Carlos

Facultad de Ciencias de la Economía y de la Empresa

Tema 1 · Esquema

CORE

Esquema del tema (bloques):

1. **Concepto** de hipótesis y fundamentos del contraste
2. **Contrastes de significación** y p-valor
3. Hipótesis simples, compuestas y potencia (visión básica)
4. **Contrastes paramétricos** en poblaciones normales (z, t, χ^2, F)
5. Contrastes de significación de **proporciones**
6. **Otros contrastes** importantes (panorama)
7. Relación entre **contrastes e intervalos de confianza**
8. **Propiedades** de algunos contrastes (visión general)
9. **Cierre**: mapa de decisión, checklist y errores típicos

1. Concepto de hipótesis y fundamentos del contraste

1.1 Concepto de hipótesis estadística

CORE

- **Definición**: Una hipótesis estadística es una **afirmación sobre una población (o sobre su distribución)** que se contrasta utilizando datos muestrales procedentes de un muestreo aleatorio.
- Puede referirse, por ejemplo, a:
  - un parámetro (μ, σ, π)
  - una diferencia entre parámetros $(\mu_1 - \mu_2, \pi_1 - \pi_2)$
  - la forma de una distribución (en ciertos contrastes)
- **Idea clave**
  - A partir de una muestra aleatoria, **no “demostramos” una hipótesis con certeza**; **evaluamos si los datos observados son compatibles con ella**.
- **Ejemplos (económicos)**
  - “El gasto medio mensual de los hogares es 1.200 €”.
  - “La proporción de clientes que compra online es 0,40”.
  - “El salario medio en dos sectores es el mismo”.

1.2 Hipótesis nula (H_0) e hipótesis alternativa (H_1)

CORE

En un contraste se plantean dos hipótesis sobre la población:

- **H_0 (hipótesis nula):** referencia o **situación "de partida"**.

  Es la hipótesis que se pone a prueba y que solo **se rechaza si la evidencia muestral es suficiente**.

- **H_1 (hipótesis alternativa):** situación que consideramos si **los datos son poco compatibles con H0**.

Regla de lenguaje (importante)

La decisión se expresa como: "**rechazamos H_0**" o "**no rechazamos H_0**" (**no decimos "aceptamos H_0"**).

Ejemplo (gasto medio)

H_0: μ = 1.200 €

H_1: μ ≠ 1.200 € (bilateral)

Qué determina H_1: La forma de H1 (≠, >, <) fija si el contraste es **bilateral o unilateral**.

1.3 Hipótesis simples y compuestas

CORE

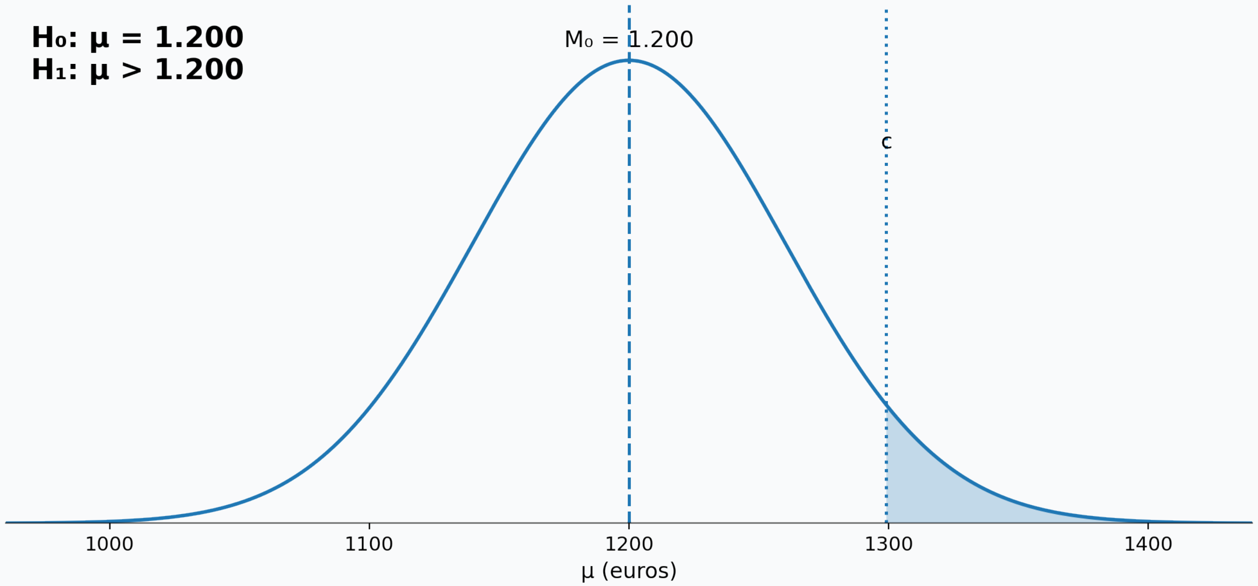
Según el tipo de afirmación sobre el parámetro, distinguimos:

- **Hipótesis simple**

  La hipótesis fija un valor concreto del parámetro.

  Ejemplo:

  - H_0: $\mu = 1.200$
  - H_1: $\mu = 1.250$



- **Hipótesis compuesta**

La hipótesis contempla un conjunto de posibles valores del parámetro.

Ejemplos:

- H_0: $\mu \geq 1.200$
- H_1: $\mu < 1.200$ (unilateral izquierda)
- H_1: $\mu \neq 1.200$ (bilateral)
- H_1: $\mu > 1.200$ (unilateral derecha)

- **Nota**: La forma de H_1 determina el tipo de contraste: bilateral o unilateral.

1.4 Contraste de hipótesis: concepto general

CORE

Un contraste de hipótesis es un **procedimiento de decisión**, basado en una **muestra aleatoria**, para **valorar si los datos son compatibles con una hipótesis** sobre la población.

Planteamiento

- H_0: hipótesis nula (referencia)
- H_1: hipótesis alternativa

Decisión

Tomamos una decisión a partir de la muestra:

- rechazamos H_0, o
- no rechazamos H_0.

Nivel de significación

El contraste se construye para que, **si H_0 es cierta, la probabilidad de rechazar H_0 sea α**.

Ejemplo (gasto medio)

H_0: $\mu = 1.200$ €

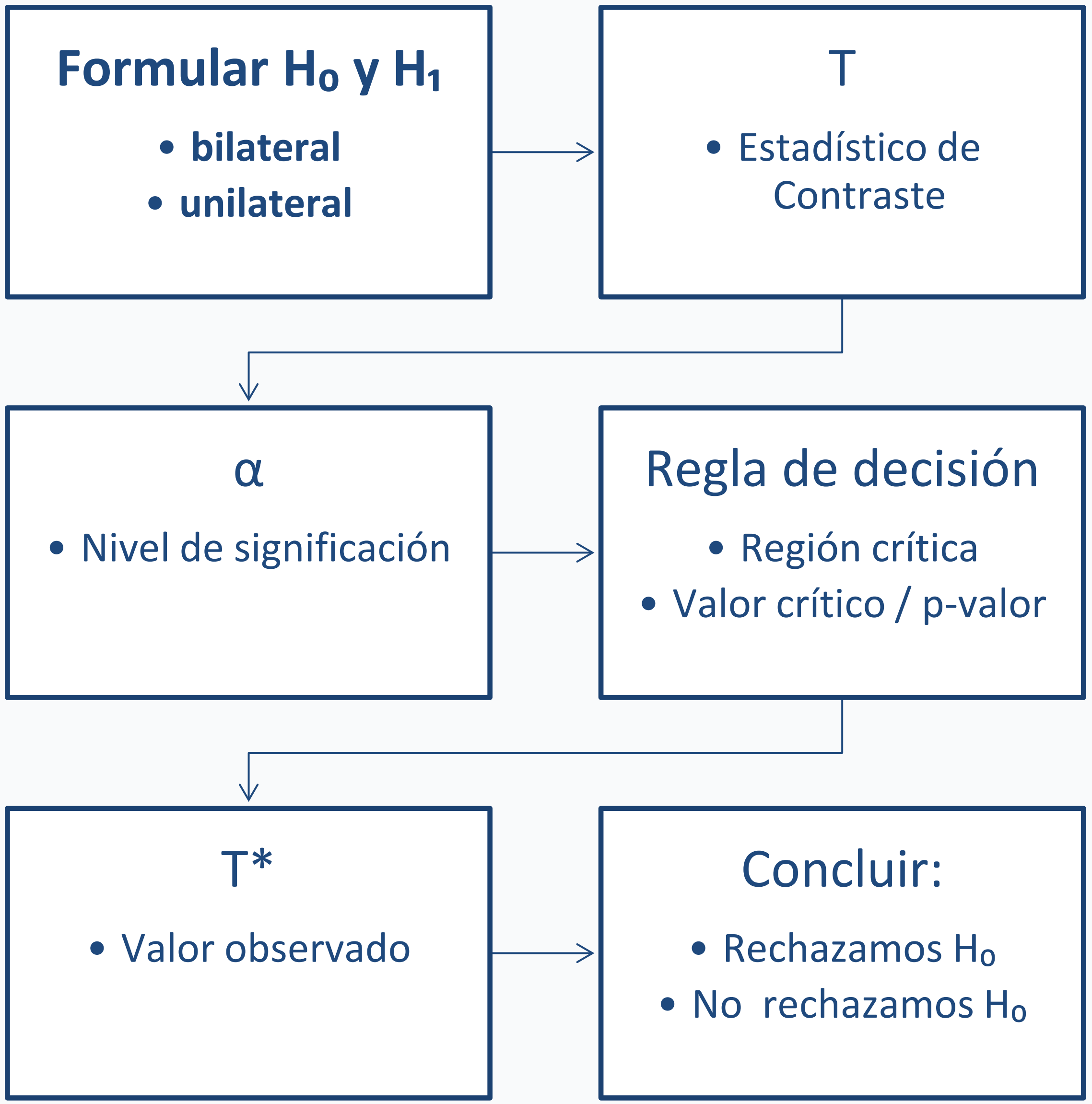
H_1: $\mu > 1.200$ €

1.5 Procedimiento general de un contraste (visión global) CORE

Pasos

1. **Formular H_0 y H_1 (bilateral o unilateral).**
2. Elegir un **estadístico de contraste T,** calculable con la muestra.
3. Fijar el **nivel de significación** α.
4. Obtener la **regla de decisión** bajo H_0:
   - **región crítica**, o
   - **valor crítico** / p-valor.
5. Calcular el **valor observado T*** con los datos muestrales.
6. **Concluir** en contexto:
   - rechazamos H_0, o
   - no rechazamos H_0.

Nota docente: La regla de decisión se diseña “pensando en H_0”: si H_0 es cierta, la probabilidad de rechazarla es α.



1.6 Sucesos del contraste: rechazo / no rechazo de H_0

CORE

Un contraste asigna cada posible muestra a uno de estos **dos sucesos**:

- **Rechazar H_0**: El resultado muestral se considera poco compatible con H_0.
- **No rechazar H_0:** El resultado muestral se considera compatible con H_0 (**no hay evidencia suficiente para rechazarla**).

Interpretación importante

"No rechazar H_0" no significa que H_0 sea verdadera: significa que la muestra no aporta evidencia suficiente contra H_0 con el nivel de significación fijado.

Ejemplo (gasto medio)

- Si el gasto medio observado es **muy alto** respecto a 1.200 €, podríamos **rechazar** H_0: $\mu = 1.200$.
- Si **no es suficientemente alto, no rechazamos** H_0.

1.7 Región crítica y región de no rechazo

CORE

La **regla de decisión** puede expresarse como una **partición de los resultados posibles**:

- **Región crítica (R.C.)**: Conjunto de resultados que llevan a rechazar H_0.
- **Región de no rechazo (R.A.)**: Conjunto de resultados que llevan a no rechazar H_0.

Cómo se construye: Se elige la R.C. de forma que,

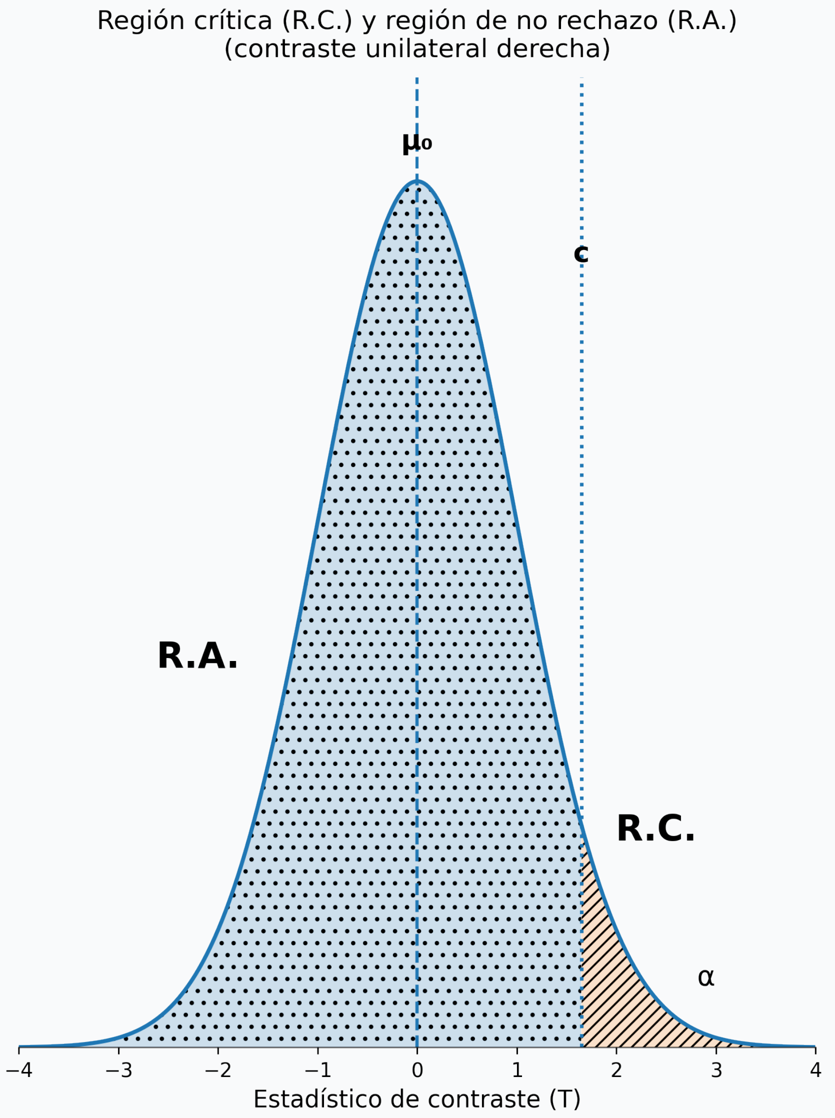
si H_0 es cierta: P(rechazar H_0) = α.

Idea práctica

En muchos contrastes trabajamos con un estadístico T:

rechazamos H_0 si T cae en la región crítica.

Nota: La **localización de R.C. depende** de si el contraste es **unilateral o bilateral**.



1.8 Probabilidades de decisión condicionadas a hipótesis cierta

CORE

En un contraste, la decisión es aleatoria porque depende de la muestra.

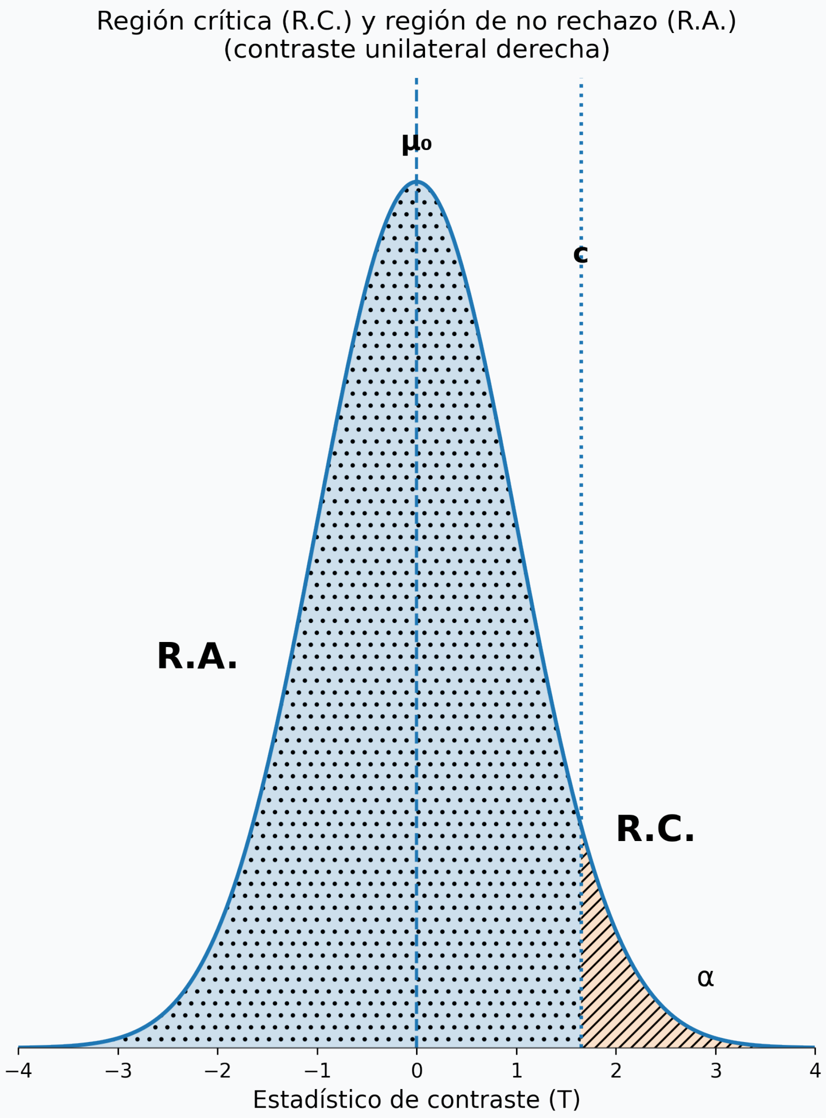
Por eso interesan probabilidades condicionadas a "qué hipótesis es cierta":

Si H_0 es cierta

- $P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ cierta}) = \alpha$
- $P(\text{no rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ cierta}) = 1 - \alpha$

Si H_1 es cierta

- $P(\text{rechazar } H_0 \mid H_1 \text{ cierta}) = 1 - \beta$ (**potencia**)
- $P(\text{no rechazar } H_0 \mid H_1 \text{ cierta}) = \beta$



Interpretación breve

- **α** controla cuántas veces **rechazamos H_0 "cuando no deberíamos"**.
- **β** mide cuántas veces **no rechazamos H_0 "cuando H_1 es la realidad"**.

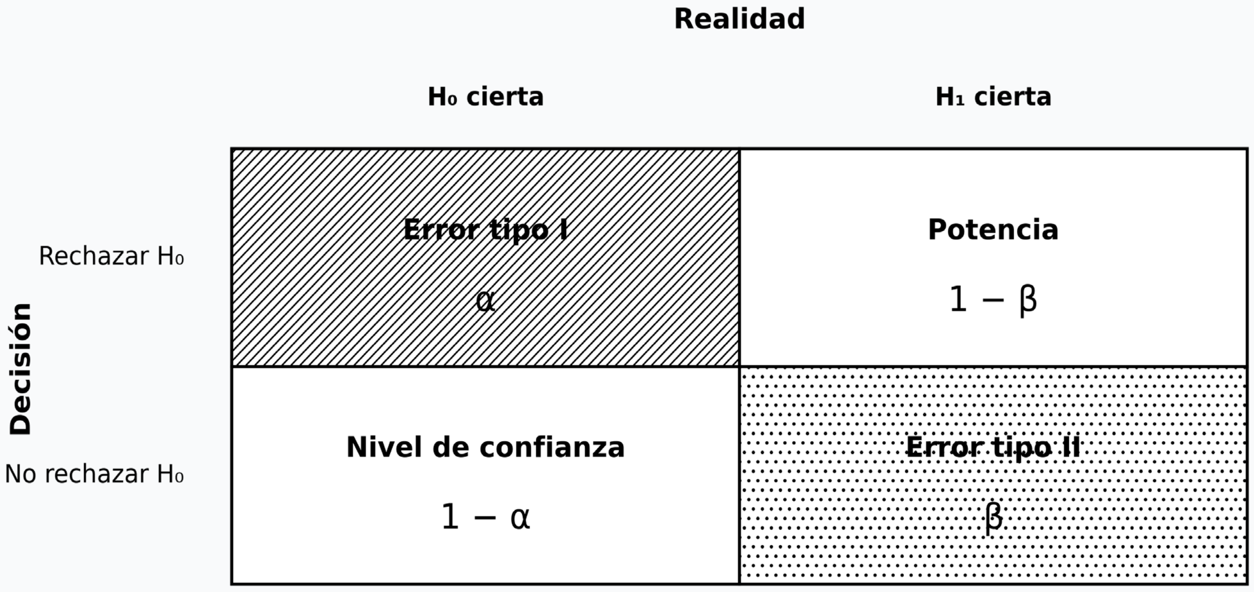
1.9 Error tipo I y error tipo II

CORE

Al decidir con una muestra, **podemos equivocarnos** de dos formas:

- **Error tipo I:** Rechazar H_0 cuando H_0 es cierta.
  - P(error tipo I) = P(rechazar H_0 | H_0 cierta) = α.
- **Error tipo II:** No rechazar H_0 cuando H_1 es cierta.
  - P(error tipo II) = P(no rechazar H_0 | H_1 cierta) = β.
- **Potencia del contraste:** Probabilidad de detectar H_1 cuando es cierta:
  - potencia = P(rechazar H_0 | H_1 cierta) = 1 − β.
- **Nota**:
  - **α se fija previamente** (nivel de significación).
  - **β depende** del tamaño muestral (n) y de cuánto se aleje la realidad muestral de H_0.

Error tipo I, error tipo II y potencia (matriz de decisión)



α se fija previamente. β depende del contraste, del tamaño muestral y de la distancia a H_0.

1.10 Relación entre α, β y potencia

CORE

En un contraste hay **dos objetivos que compiten**:

- **Mantener pequeña** la probabilidad de rechazar H_0 cuando H_0 es cierta:
    - P(rechazar H_0 | H_0 cierta) = **α**.
- Conseguir **alta probabilidad de rechazar** H_0 cuando H_1 es cierta (potencia):
    - P(rechazar H_0 | H_1 cierta) = **1 − β**.

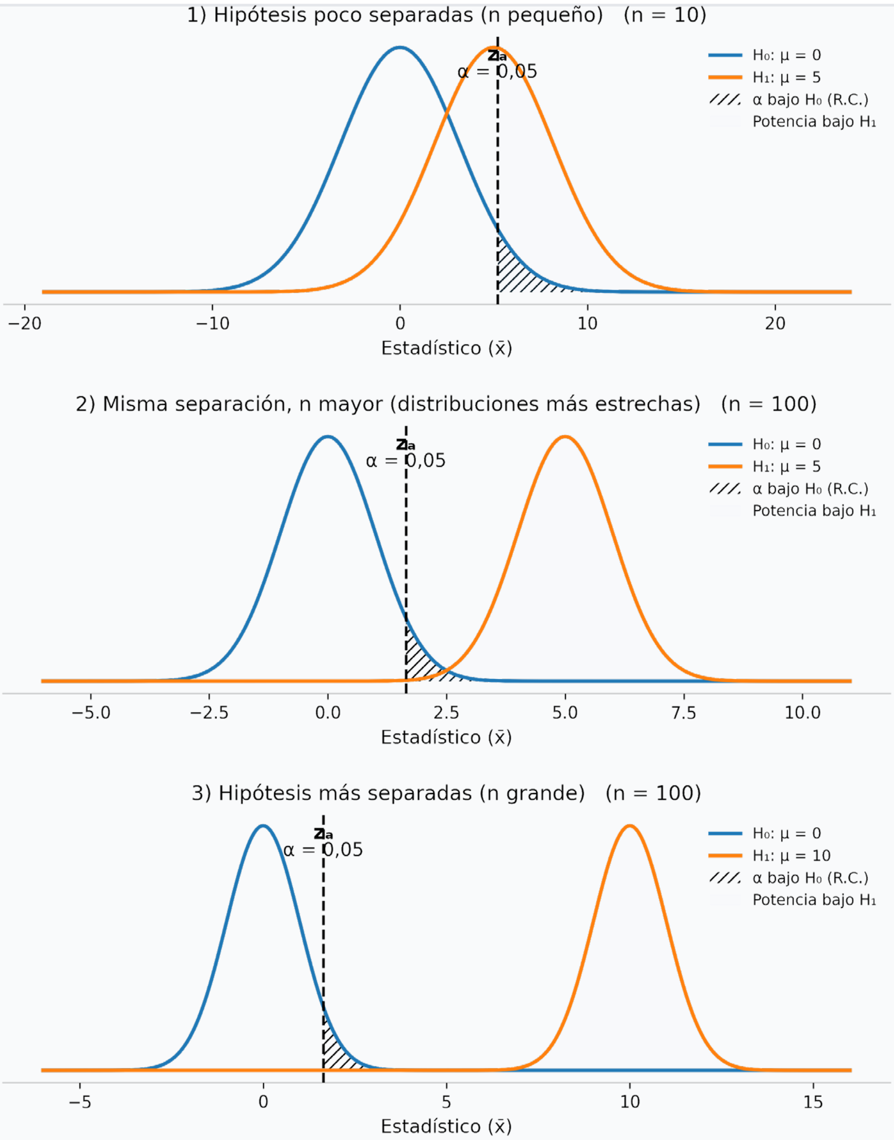
Idea clave

Con el mismo tamaño muestral y el mismo tipo de contraste:

- si hacemos **α más pequeño**, normalmente **disminuye la potencia** (sube β),
- si permitimos **un α mayor**, normalmente **aumenta la potencia** (baja β).

Cómo mejorar potencia sin aumentar α

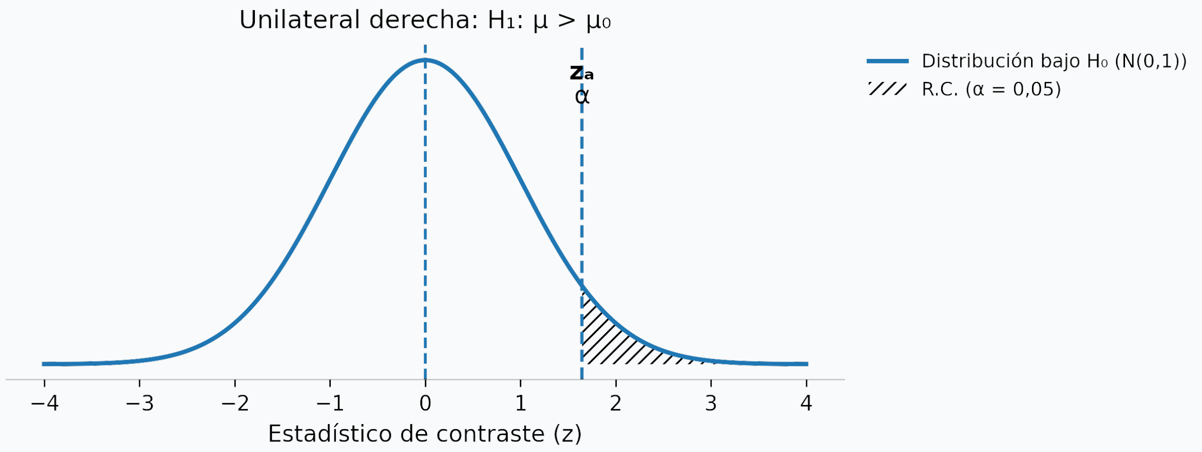
- **aumentar** el tamaño muestral n,
- plantear **alternativas más separadas** de H_0 (H_1 "más alejada" de H_0).



1.11 Contrastes unilaterales y bilaterales

CORE

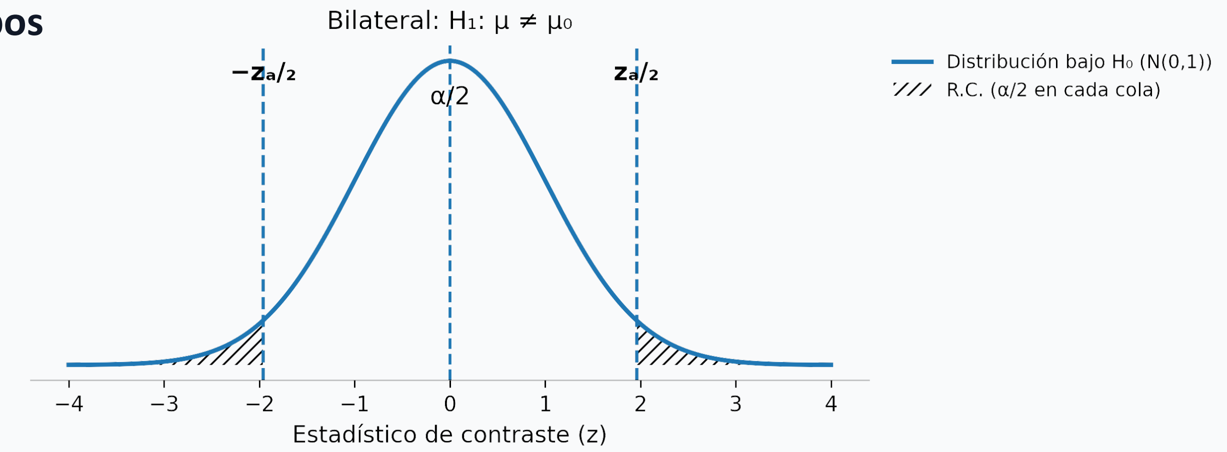
La forma de H_1 determina dónde colocamos la región crítica (R.C.):



Contraste unilateral: La alternativa apunta a **una dirección**.

- H_1: $\mu > \mu_0$ → R.C. en la **cola derecha**
- H_1: $\mu < \mu_0$ → R.C. en la **cola izquierda**

Toda la probabilidad α se coloca en una sola cola.



Contraste bilateral: La alternativa considera desviaciones en **ambos sentidos**.

- H_1: $\mu \neq \mu_0$ → R.C. repartida en dos colas

Se reparte α/2 en cada cola.

Idea clave

Antes de calcular nada, hay que decidir si H_1 es unilateral o bilateral: cambia la forma de la R.C. y el valor crítico.

1.12 Test rápido (Fundamentos del contraste)

CORE

1. **Si H_0 es cierta, ¿qué representa α?**
   a) P(no rechazar H_0 | H_0 cierta)
   b) P(rechazar H_0 | H_0 cierta)
   c) P(rechazar H_0 | H_1 cierta)
   d) P(no rechazar H_0 | H_1 cierta)
2. **Si H_1 es cierta, ¿qué representa β?**
   a) P(rechazar H_0 | H_0 cierta)
   b) P(no rechazar H_0 | H_0 cierta)
   c) P(no rechazar H_0 | H_1 cierta)
   d) P(rechazar H_0 | H_1 cierta)

3. **En un contraste bilateral, el nivel de significación α se reparte como:**
   a) α en la cola derecha
   b) α en la cola izquierda
   c) $\alpha/2$ en cada cola
   d) $1-\alpha$ en cada cola

1.12 Test rápido (Fundamentos del contraste)

CORE

1. **Si H_0 es cierta, ¿qué representa α?**
   a) P(no rechazar H_0 | H_0 cierta)
   b) P(rechazar H_0 | H_0 cierta) ✅
   c) P(rechazar H_0 | H_1 cierta)
   d) P(no rechazar H_0 | H_1 cierta)
2. **Si H_1 es cierta, ¿qué representa β?**
   a) P(rechazar H_0 | H_0 cierta)
   b) P(no rechazar H_0 | H_0 cierta)
   c) P(no rechazar H_0 | H_1 cierta) ✅
   d) P(rechazar H_0 | H_1 cierta)

3. **En un contraste bilateral, el nivel de significación α se reparte como:**
   a) α en la cola derecha
   b) α en la cola izquierda
   c) $\alpha/2$ en cada cola ✅
   d) $1-\alpha$ en cada cola

2. Contrastes de significación y p-valor

2.1 Contrastes de significación: idea general

CORE

Un contraste de significación **fija un nivel de significación α** y **decide si** los datos observados son **compatibles con H_0**.

Idea clave

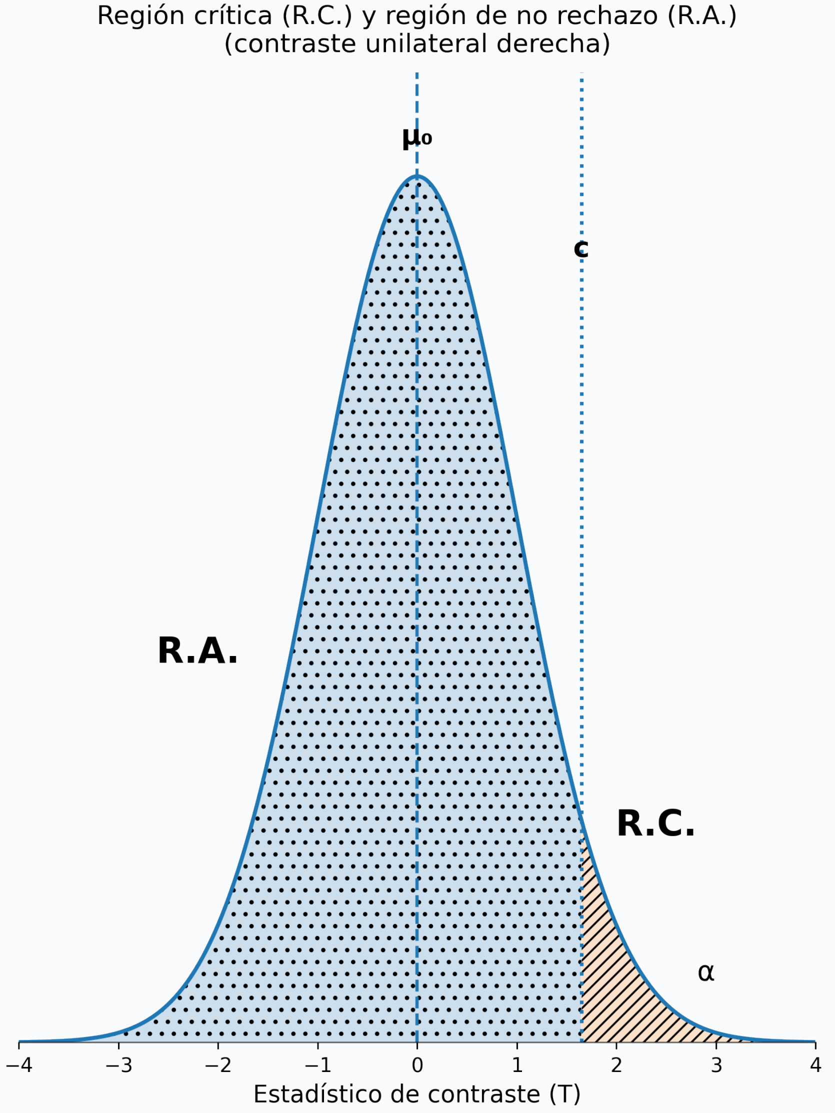
Medimos "cuán extremo" es el resultado muestral bajo H_0.

Regla de decisión (concepto)

- **Rechazamos H_0** si el resultado es **suficientemente extremo** (cae en la R.C.).
- No rechazamos H_0 en caso contrario (cae en la R.A.).

Comentario

El nivel α controla, cuando H_0 es cierta, la probabilidad de rechazar H_0.



2.2 Estadístico de contraste: qué es y cómo se usa

CORE

Un estadístico de contraste T es una función de la muestra que resume la evidencia contra H_0.

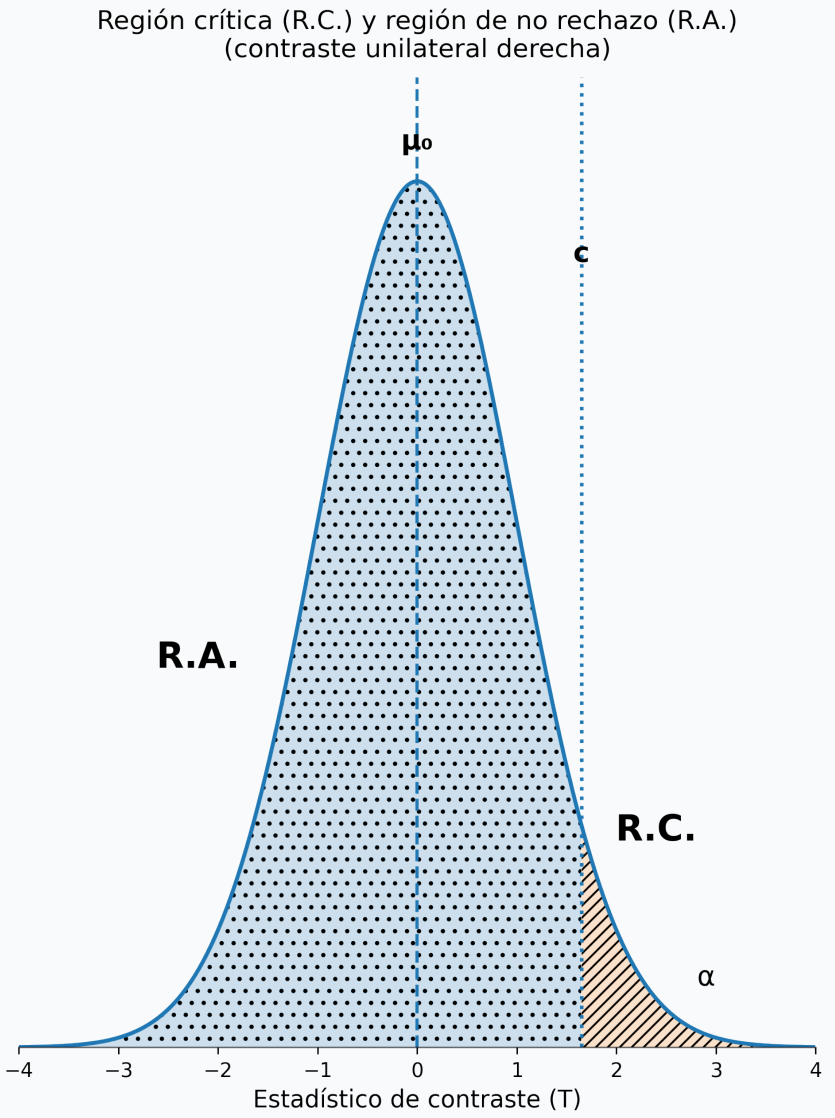
Se elige **T de forma que, bajo H_0, conozcamos su distribución** (o una aproximación).

Ejemplos típicos

- z, t, χ^2, F

Idea práctica: Trabajamos en el eje de T:

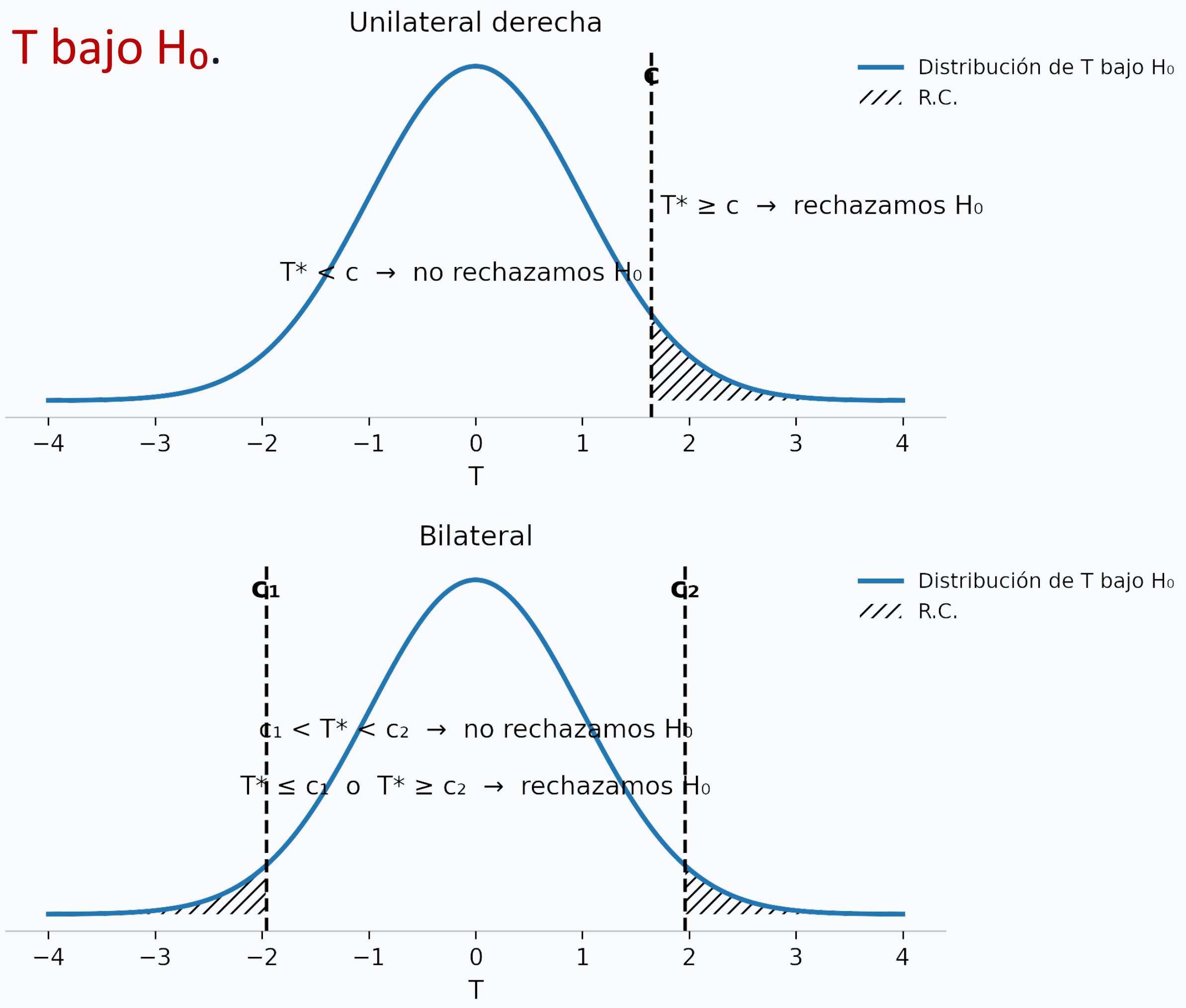
- definimos la **R.C. en términos de T**,
- **calculamos el valor observado T*,**
- **Observamos si T* cae en la R.C**. (o con el p-valor, comparando con α).



2.3 Decisión por valor crítico (regla de rechazo / no rechazo)

CORE

Fijado el nivel de significación **α**, se determina un **valor crítico c** (o dos valores críticos en bilateral) usando la distribución de T bajo H_0.



Regla de decisión (unilateral derecha)

- Rechazamos H_0 si $T^* \geq c$.
- No rechazamos H_0 si $T^* < c$.

Regla de decisión (bilateral)

- Rechazamos H_0 si $T^* \leq c_1$ o $T^* \geq c_2$.
- No rechazamos H_0 si $c_1 < T^* < c_2$.

Interpretación

Los valores críticos se fijan para que, si H_0 es cierta, la probabilidad de caer en la R.C. sea α (o α/2 en cada cola en bilateral).

2.4 p-valor: concepto e interpretación

CORE

El **p-valor es la probabilidad, suponiendo que H_0 es cierta, de obtener un resultado tan extremo como el observado** (o más extremo), **en la dirección indicada por H_1**.

Interpretación (muy importante)

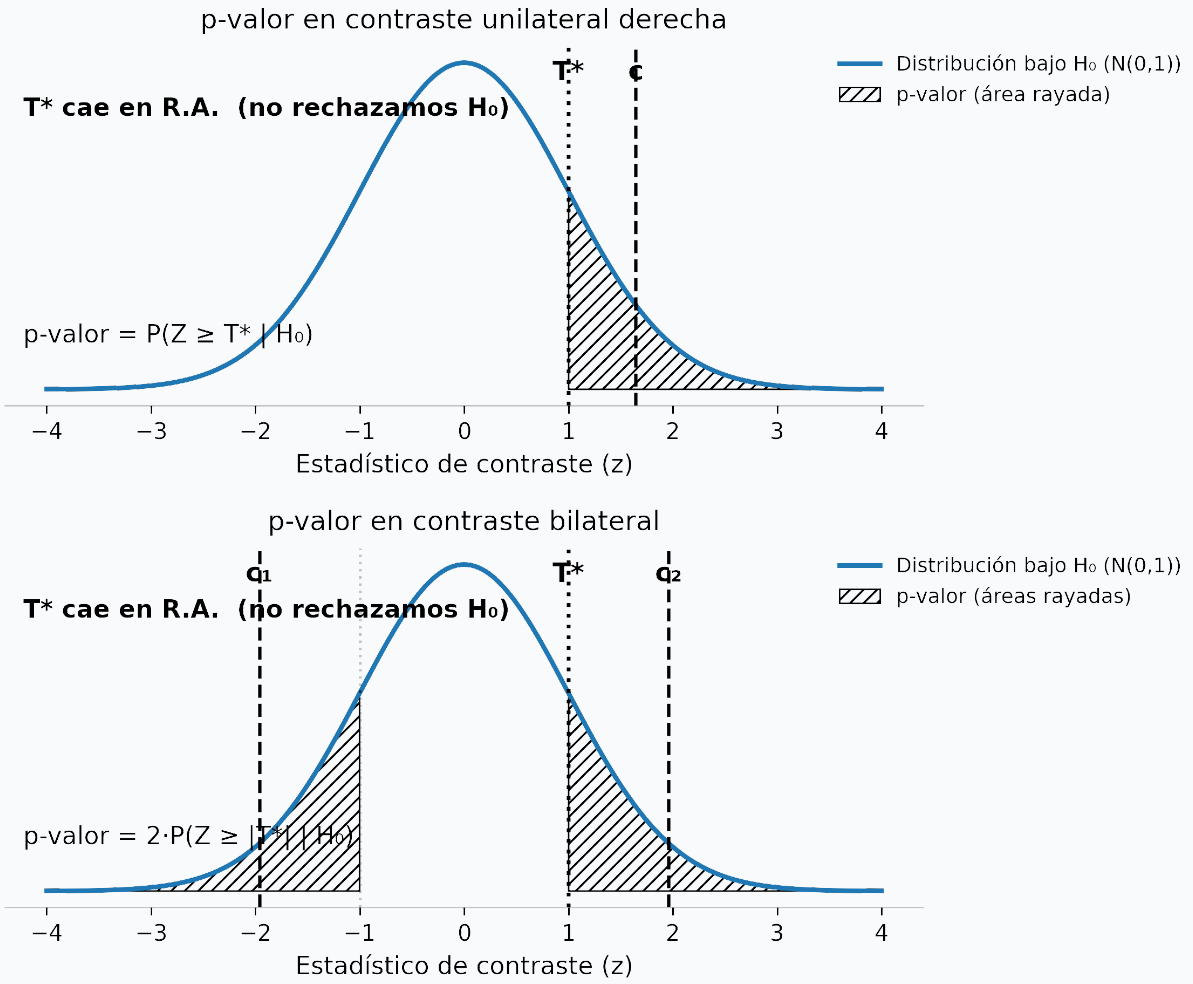
- p-valor **pequeño** → el resultado es **poco compatible** con H_0 → tendemos a rechazar H_0.
- p-valor **grande** → el resultado es **compatible** con H_0 → no rechazamos H_0.

Regla de decisión

- Si p-valor ≤ α → rechazamos H_0.
- Si p-valor > α → no rechazamos H_0.

Nota

El p-valor NO es la probabilidad de que H_0 sea cierta.



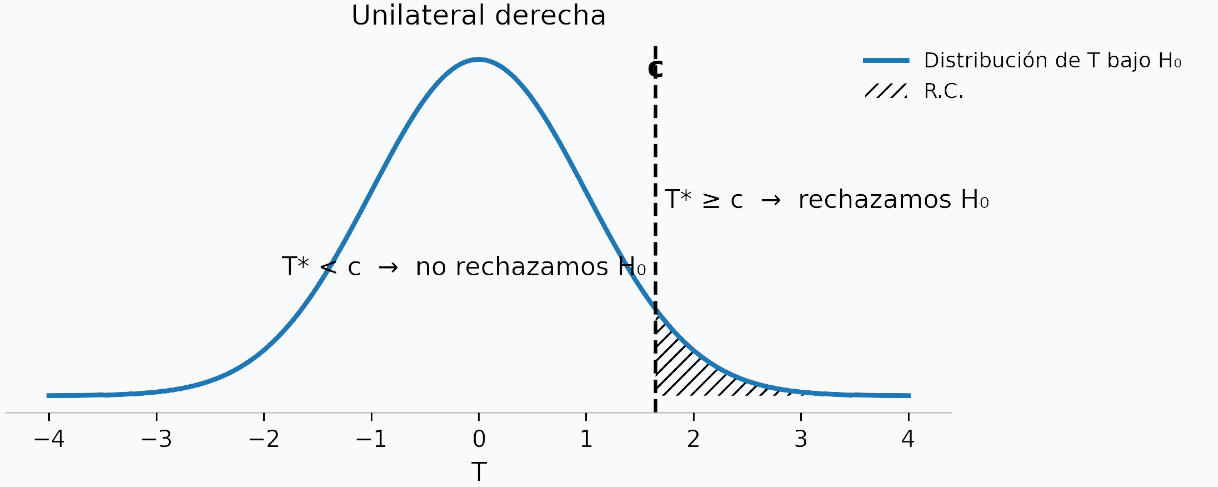
2.5 Decisión por valor crítico vs decisión por p-valor

CORE

Son dos formas equivalentes de tomar la decisión (con el mismo α).

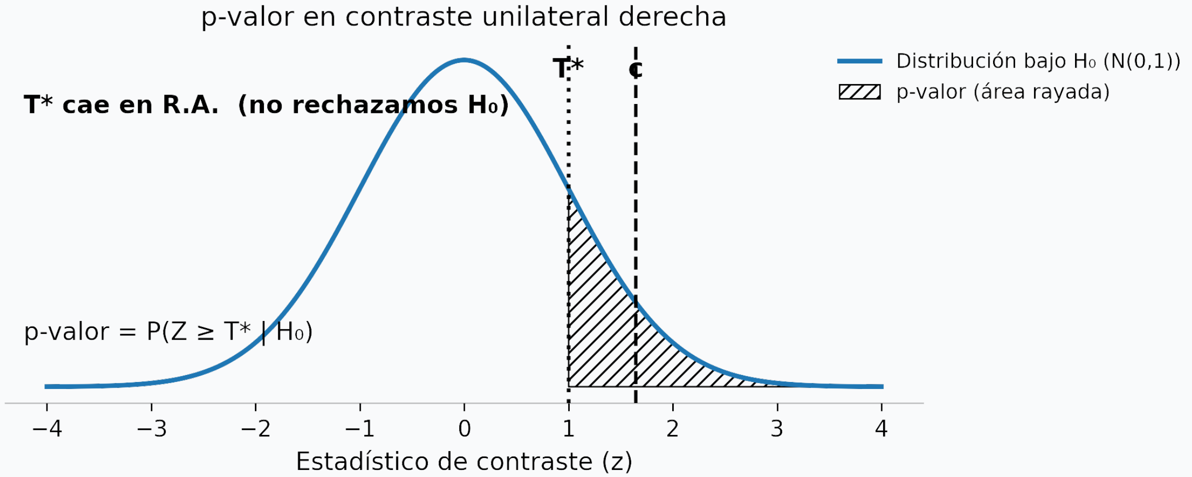
Enfoque 1: valor crítico

1. Fijamos α.
2. Calculamos el valor crítico (c, o c_1 y c_2).
3. Comparamos T* con la región crítica:
   - si T* cae en la R.C. → rechazamos H_0
   - si T* cae en la R.A. → no rechazamos H_0



Enfoque 2: p-valor

1. Calculamos el p-valor asociado a T* (según H_1).
2. Comparamos con α:
   - si p-valor ≤ α → rechazamos H_0
   - si p-valor > α → no rechazamos H_0



Idea clave: Ambos métodos llevan a la misma decisión; cambia la forma de presentarla.

2.6 Errores frecuentes de interpretación del p-valor

CORE

1. **“El p-valor es la probabilidad de que H_0 sea cierta.”** ❌ Incorrecto.
    - El p-valor se calcula suponiendo que H_0 es cierta.
2. **“Un p-valor grande prueba que H_0 es verdadera.”** ❌ Incorrecto.
    - Un p-valor grande indica que los datos son compatibles con H_0, pero no demuestra H_0.
3. **“p-valor pequeño implica un efecto grande.”** ⚠️ No necesariamente.
    - El p-valor mide compatibilidad con H_0, **no el tamaño del efecto**.
    - Con muestras grandes, incluso una diferencia pequeña respecto a H_0 puede generar un estadístico muy extremo y, por tanto, un p-valor pequeño.
4. **“Si no rechazo H_0, entonces H_0 es cierta.”** ❌ Incorrecto.
    - “No rechazar H_0” significa que no hay evidencia suficiente contra H_0 con el α fijado.

(Recordatorio)

Decidimos: rechazamos H_0 / no rechazamos H_0.

CORE

1.12 Test rápido (Fundamentos del contraste)

1. **En un contraste con $\alpha = 0{,}05$, si p-valor = 0,03**:
   a) No rechazamos H_0
   b) Rechazamos H_0
   c) No se puede decidir sin n
   d) Depende de si el contraste es unilateral o bilateral
2. **El p-valor se define como**:
   a) $P(H_0$ es cierta | datos)
   b) P(datos observados | H_0 cierta)
   c) P(obtener un resultado tan extremo como el observado | H_0 cierta)
   d) P(rechazar H_0 | H_1 cierta)
3. **Si no rechazamos H_0, entonces**:
   a) H_0 es verdadera
   b) Hemos probado H_0
   c) No hay evidencia suficiente contra H_0 con ese α
   d) El efecto es cero

1.12 Test rápido (Fundamentos del contraste)

CORE

1. **En un contraste con α = 0,05, si p-valor = 0,03**:
   a) No rechazamos H_0
   b) Rechazamos H_0 ✅
   c) No se puede decidir sin n
   d) Depende de si el contraste es unilateral o bilateral
2. **El p-valor se define como**:
   a) P(H_0 es cierta | datos)
   b) P(datos observados | H_0 cierta)
   c) P(obtener un resultado tan extremo como el observado | H_0 cierta) ✅
   d) P(rechazar H_0 | H_1 cierta)
3. **Si no rechazamos H_0, entonces**:
   a) H_0 es verdadera
   b) Hemos probado H_0
   c) No hay evidencia suficiente contra H_0 con ese α ✅
   d) El efecto es cero

3. Hipótesis simples, compuestas y potencia

3.1 Hipótesis simples: idea y papel en el diseño del contraste

CORE

Hipótesis simple

Una hipótesis es simple si **fija un único valor del parámetro**.

Ejemplo:

$$H_0 \colon \mu = \mu_0$$

Por qué importa

Cuando H_0 es simple, podemos diseñar la R.C. para que:

$$P(rechazar\ H_0 \mid H_0\ cierta) = \alpha$$

Idea práctica

En muchos contrastes paramétricos, **el diseño del contraste se hace "bajo H_0":** conocemos (o aproximamos) la **distribución del estadístico T cuando H_0 es cierta**.

(Nota)

En esta sección veremos cómo medir la capacidad del contraste para detectar alternativas: la potencia.

3.3 Función de potencia: definición e interpretación

CORE

Es la probabilidad de rechazar H_0 cuando el parámetro toma un valor concreto θ:

$$Potencia(\theta) = P(rechazar\ H_0 \mid \theta)$$

Interpretación

- **Si θ cumple H_0**, la potencia coincide con α:

$$Potencia(\theta_0) = \alpha\ (cuando\ H_0\ es\ simple:\ \theta = \theta_0)$$

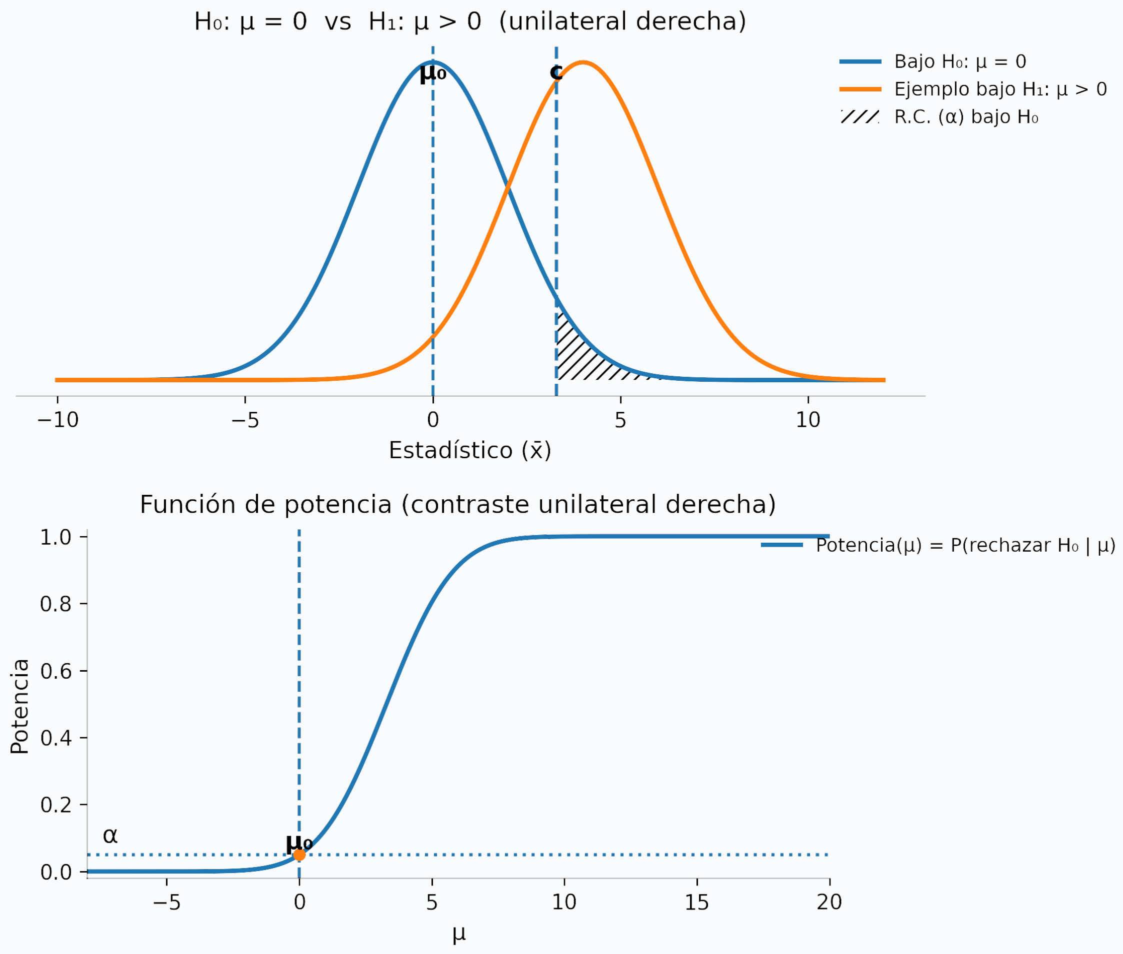
- **Si θ pertenece a H_1**, **la potencia suele ser mayor cuanto más "lejos"** esté θ de θ_0.

Lectura docente

La potencia describe la **capacidad del contraste para detectar desviaciones respecto a H_0.**

(Nota)

$$\beta(\theta) = P(no\ rechazar\ H_0 \mid \theta)$$
$$potencia(\theta) = 1 - \beta(\theta).$$



3.4 Lema de Neyman–Pearson (versión intuitiva)

CORE

Contexto

Cuando comparamos dos hipótesis simples:

- $H_1\colon \theta = \theta_1$
- $H_0\colon \theta = \theta_0$

Objetivo

Entre todos los contrastes con nivel de significación α, **buscamos el que tenga mayor potencia** frente a H_1.

Idea central (sin demostración)

El contraste más potente se obtiene eligiendo como **región crítica** los resultados **donde la evidencia a favor de H_1 frente a H_0 es mayor**.

Cómo se mide esa evidencia

Mediante la **razón de verosimilitudes**:

$$L(x_1,..,x_n\,|\theta_1)\;/\;L(x_1,..,x_n|\,\theta_0) = \frac{L(X|\theta_1)}{L(X|\theta_2)}$$

Regla intuitiva: Rechazamos H_0 para los valores de la muestra donde esa razón es "grande".

3.5 Análisis del error tipo II (β) y potencia (1–β)

CORE

Recordatorio

- En un contraste, el error tipo II consiste en no rechazar $H0$ cuando en realidad $H1$ es cierta.

Idea clave

β no es un número fijo: **depende de cuál sea el valor real del parámetro bajo H_1.**

Por eso hablamos de:

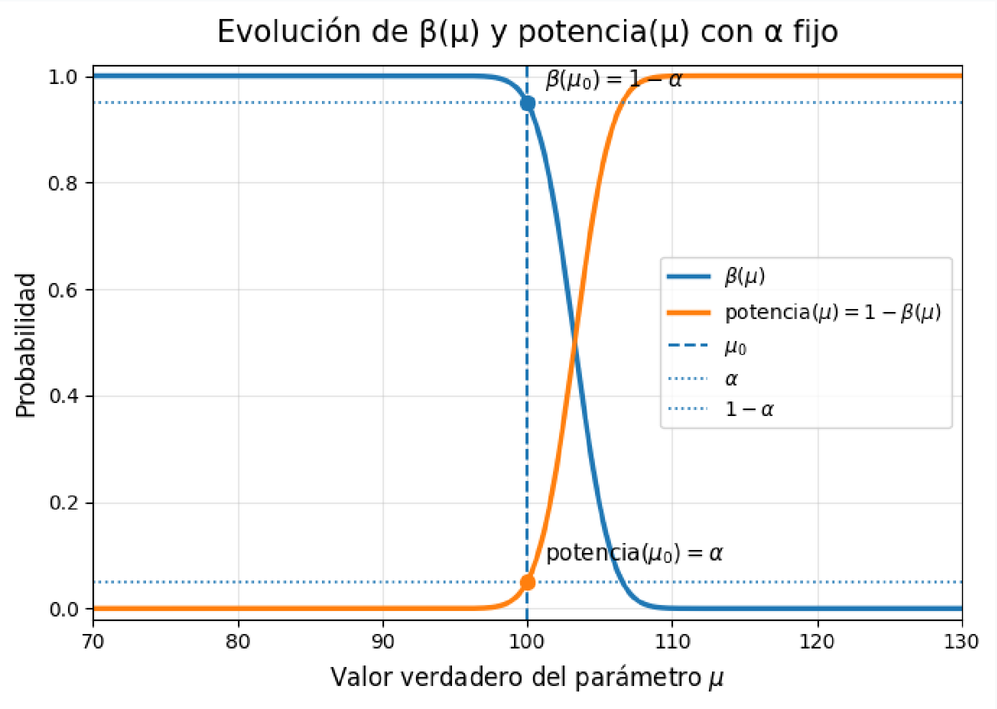
- **función de error de tipo II**: $\beta(\theta)$
- **función de potencia**: potencia(θ)=1−$\beta(\theta)$

Un buen contraste:

- se construye fijando previamente α, de modo que si H_0 es cierta se cumple

$$P(rechazar\ H_0|H_1\ cierta) = \alpha$$

- y logra potencia alta (1−β) para valores relevantes del parámetro dentro de H_1.



Gráfica: al fijar α, queda fijada la región crítica;

- si $\mu = \mu_0$, la potencia vale α;
- a medida que μ se aleja de μ_0 en la dirección de H_1, $\beta(\mu)$ baja y $potencia(\mu)$ sube;
- cuanto más lejos esté el valor verdadero del parámetro dentro de H_1, más fácil es rechazar H_0.

3.6 Cómo mejora la potencia

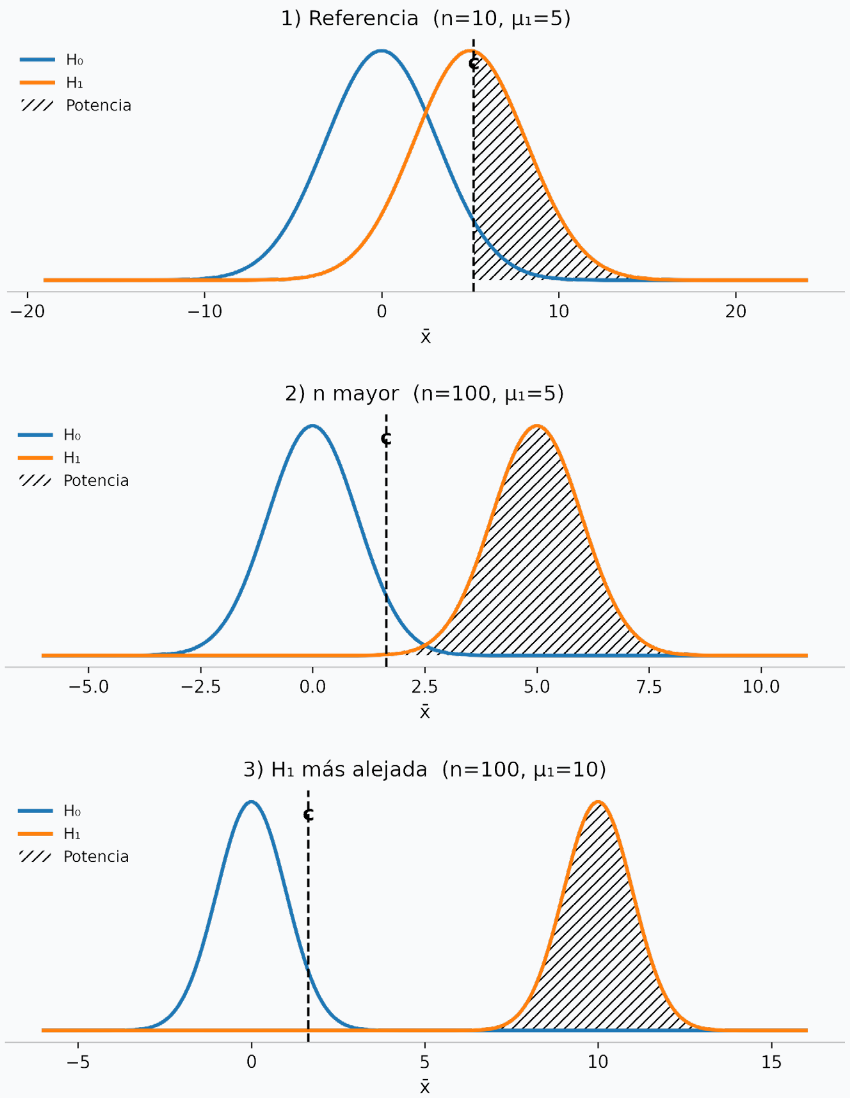
CORE

La potencia aumenta (en general) cuando:

1. **Aumenta el tamaño muestral n**
   - La distribución del estadístico bajo H_0 y bajo H_1 se concentra más y se solapan menos.
2. **H_1 está más separada de H_0**
   - Cuanto más "alejado" esté el valor real del parámetro respecto al valor nulo, más fácil es caer en la R.C.
3. Elegimos un **contraste adecuado para la forma de H_1**
   - Un contraste unilateral puede tener más potencia que uno bilateral si H_1 apunta a una dirección concreta.

(Nota)

Manteniendo α fijo, mejorar potencia implica reducir β.



3.7 Test rápido (Potencia)

CORE

1. **La potencia de un contraste es:**
   a) P(rechazar H_0 | H_0 cierta)
   b) P(no rechazar H_0 | H_0 cierta)
   c) P(rechazar H_0 | H_1 cierta)
   d) P(no rechazar H_0 | H_1 cierta)
2. **Manteniendo α fijo, ¿qué efecto suele tener aumentar n?**
   a) Aumenta β y disminuye la potencia
   b) Disminuye β y aumenta la potencia
   c) No cambia β ni la potencia
   d) Cambia α
3. **En un contraste unilateral, frente a un bilateral con el mismo α, en general:**
   a) La potencia suele ser menor
   b) La potencia suele ser mayor si H_1 apunta a esa dirección
   c) La potencia es siempre igual
   d) No puede compararse

3.7 Test rápido (Potencia)

CORE

1. **La potencia de un contraste es:**
   a) P(rechazar H_0 | H_0 cierta)
   b) P(no rechazar H_0 | H_0 cierta)
   c) P(rechazar H_0 | H_1 cierta) ✅
   d) P(no rechazar H_0 | H_1 cierta)
2. **Manteniendo α fijo, ¿qué efecto suele tener aumentar n?**
   a) Aumenta β y disminuye la potencia
   b) Disminuye β y aumenta la potencia ✅
   c) No cambia β ni la potencia
   d) Cambia α
3. **En un contraste unilateral, frente a un bilateral con el mismo α, en general:**
   a) La potencia suele ser menor
   b) La potencia suele ser mayor si H_1 apunta a esa dirección ✅
   c) La potencia es siempre igual
   d) No puede compararse

4. Contrastes paramétricos en poblaciones normales (z, t, χ^2, F)

4.1 Mapa paramétrico en normales: z, t, χ^2, F

CORE

En poblaciones normales (o con aproximaciones justificadas), los contrastes típicos se apoyan en estas distribuciones:

z	Para contrastes **sobre μ cuando la desviación típica poblacional σ es conocida** (o cuando n es grande y se justifica aproximación).
t_{n-1}	Para contrastes **sobre μ cuando σ es desconocida** y estimamos con S o S_1.
χ^2	Para contrastes **sobre σ^2** o σ (o desviación típica) **en normal**.
$F_{m,n}$	Para **contrastes sobre igualdad de varianzas** en dos poblaciones normales: **$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$**.

Idea clave

Siempre seguimos el mismo esquema:

$$H_0/H_1 \rightarrow \textit{estadístico}\ T \rightarrow \textit{distribución bajo}\ H_0 \rightarrow R.C./p - valor \rightarrow \textit{decisión}.$$

4.2 Contraste de μ en N(μ,σ) con σ conocida (z): planteamiento

CORE

Contexto

- Población normal N(μ,σ) con σ conocida.
- Tomamos una muestra aleatoria de tamaño n y calculamos la media muestral $\bar{x}$.

Hipótesis (ejemplos)

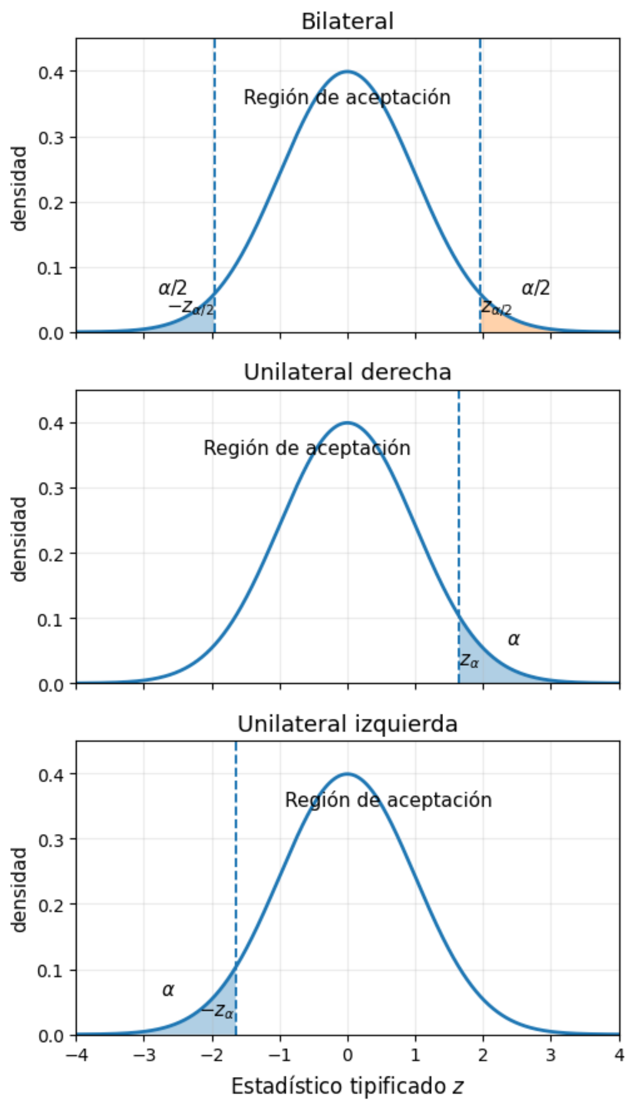
- **Bilateral**: H_0: $\mu = \mu_0$ frente a H_1: $\mu \neq \mu_0$
- Unilateral **derecha**: H_0: $\mu = \mu_0$ frente a H_1: $\mu > \mu_0$
- Unilateral **izquierda**: H_0: $\mu = \mu_0$ frente a H_1: $\mu < \mu_0$

Distribución bajo H_0

$$Si\ H_0 es\ cierta, entonces\ z \sim N(0,1)\ con\ \mu = \mu_0.$$

Estadístico de contraste (z)

$$z = (\bar{x} - \mu_0) / (\sigma/\sqrt{n})$$



4.3 Contraste z para μ: regla de decisión e interpretación

CORE

Fijamos el nivel de significación α y usamos $N(0,1)$ para obtener valores críticos.

Unilateral derecha (H_1: $\mu > \mu_0$)

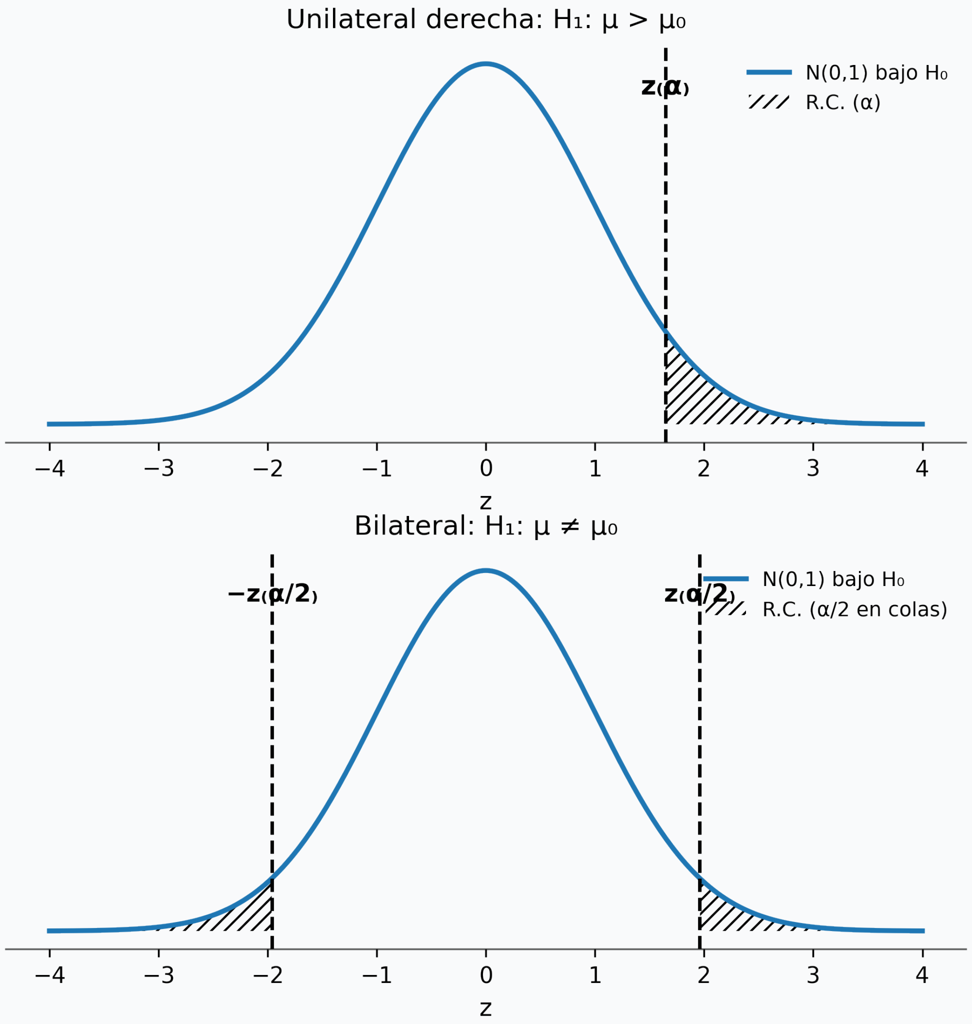
- **R.C.**: $z \geq z_\alpha$
- Decisión:
  - si $z^* \geq z_\alpha \rightarrow$ rechazamos H_0
  - si $z^* < z_\alpha \rightarrow$ no rechazamos H_0

Unilateral izquierda (H_1: $\mu < \mu_0$)

- **R.C.**: $z \leq -z_\alpha$

Bilateral (H_1: $\mu \neq \mu_0$)

- **R.C.**: $|z| \geq z_{\alpha/2}$



Interpretación en contexto

Si rechazamos H_0, concluimos que hay evidencia muestral suficiente, al nivel α, a favor de H_1.

4.4 Ejemplo económico guiado (μ con σ conocida, z)

CORE

Contexto

Una cadena de supermercados quiere comprobar si el gasto medio de una "cesta rápida" en hora punta ha subido respecto a 39,2 €. Por datos históricos, la desviación típica poblacional es σ = 12 €.

Muestra aleatoria

n = 36 tickets

$\bar{x}$ = 41,6 €

Hipótesis (unilateral derecha)

H_0: μ = 39,2

H_1: μ > 39,2

Nivel de significación

α = 0,05

Estadístico z

- $z = (\bar{x} - \boldsymbol{\mu_0}) / (\sigma/\sqrt{n})$
- $z = (41{,}6 - \mathbf{39{,}2}) / (12/\sqrt{36})$
- $z = 2{,}4/2 = 1{,}2$

Decisión (unilateral derecha)

Valor crítico: $z_{\{0{,}05\}} \approx 1{,}645$

Como $1{,}20 < 1{,}645$ → no rechazamos H_0.

Conclusión (en contexto)

Con α = 0,05, la muestra no aporta evidencia suficiente para afirmar que el gasto medio ha subido.

4.5 Contraste de μ en $N(\mu, \sigma)$ con σ desconocida (t)

CORE

Contexto

Población normal N(μ,σ) con σ desconocida.

Tomamos una muestra aleatoria de tamaño n y calculamos:

- media muestral $\bar{x}$
- cuasidesviación típica muestral S_1

Hipótesis (ejemplos)

- Bilateral: H_0: $\mu = \mu_0$ frente a H_1: $\mu \neq \mu_0$
- Unilateral derecha: H_0: $\mu = \mu_0$ frente a H_1: $\mu > \mu_0$
- Unilateral izquierda: H_0: $\mu = \mu_0$ frente a H_1: $\mu < \mu_0$

Estadístico de contraste (t)

$$t = (\bar{x} - \boldsymbol{\mu_0}) \,/\, (S_1/\sqrt{n})$$

Distribución bajo H_0

Si H_0 es cierta, entonces t sigue una t de Student con (n−1) grados de libertad.

4.6 Contraste t para μ: grados de libertad y decisión

CORE

Grados de libertad

En este contraste: $t \sim t_{n-1}$ bajo H_0.

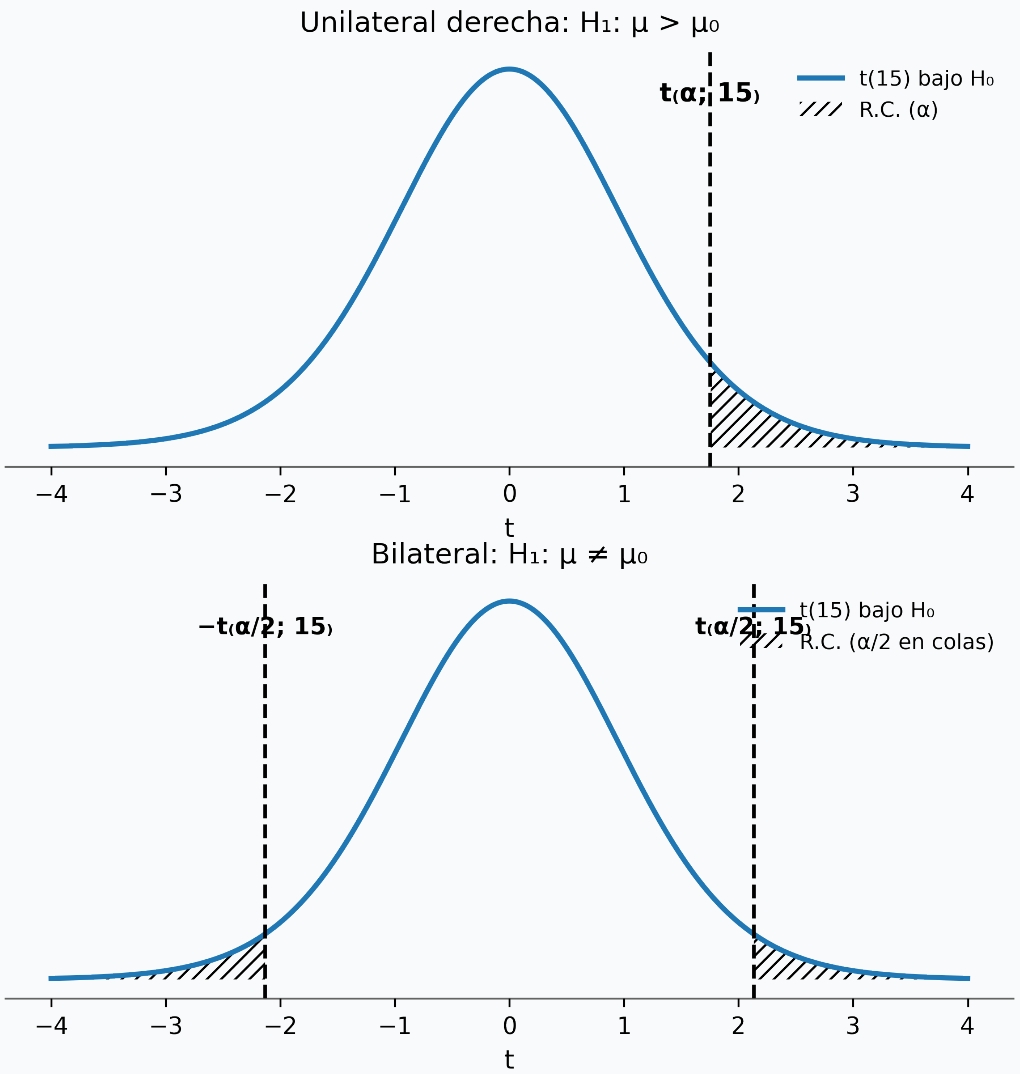
Por eso, el valor crítico depende de n (no solo de α).

Regla de decisión (misma lógica que en z)

- **Unilateral derecha** ($H_1\!: \mu > \mu_0$)
  - R.C.: $t \geq t_{\alpha,n-1}$
- **Unilateral izquierda** ($H_1\!: \mu < \mu_0$)
  - R.C.: $t \leq -t_{\alpha,n-1}$
- **Bilateral** ($H_1\!: \mu \neq \mu_0$)
  - R.C.: $|t| \geq t_{\alpha,n-1}$

Interpretación

Con n pequeño, la t tiene colas más gruesas que N(0,1), por eso los valores críticos son mayores en valor absoluto.



4.7 Ejemplo económico guiado (μ con σ desconocida, t)

CORE

Contexto

Una empresa analiza el tiempo medio (en minutos) de resolución de incidencias. Se asume normalidad.

Muestra aleatoria

$n = 16$ incidencias

$\bar{x} = 52{,}5$

$S_1 = 8{,}0$

Hipótesis (bilateral)

H_0: $\mu = 50$

H_1: $\mu \neq 50$

Nivel de significación

$\alpha = 0{,}05$

Estadístico t

$$t = (\bar{x} - \mu_0)/(S_1/\sqrt{n})$$
$$t = (52{,}5 - 50)/(8/\sqrt{16}) = 2{,}5/2 = 1{,}25$$

Decisión (bilateral)

Grados de libertad: $n-1 = 15$

Valor crítico: $t_{\{0{,}025;15\}} \approx 2{,}131$

Como $|1{,}25| < 2{,}131 \rightarrow$ no rechazamos H_0.

Conclusión (en contexto)

Con $\alpha = 0{,}05$, la muestra no aporta evidencia suficiente para afirmar que el tiempo medio difiere de 50 minutos.

4.8 Contraste sobre la varianza (o desviación típica) en $N(\mu, \sigma)$: idea

CORE

Objetivo

Contrastar hipótesis sobre la variabilidad de una población normal.

Ejemplos de hipótesis

- H_0: $\sigma = \sigma_0$ frente a H_1: $\sigma \neq \sigma_0$
- H_0: $\sigma \leq \sigma_0$ frente a H_1: $\sigma > \sigma_0$
- H_0: $\sigma \geq \sigma_0$ frente a H_1: $\sigma < \sigma_0$

Dato muestral clave

Usamos la cuasivarianza S_1^2 (equivalentemente, S^2).

Estadístico de contraste (χ^2)

$$\chi^2 = (n-1) \cdot {S_1}^2 \,/\, {\sigma_0}^2 = n \cdot S^2 \,/\, {\sigma_0}^2$$

Distribución bajo H_0

Si H_0 es cierta, entonces:

$$\chi^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

4.9 Regiones críticas en χ² (una cola / dos colas)

CORE

Recordatorio

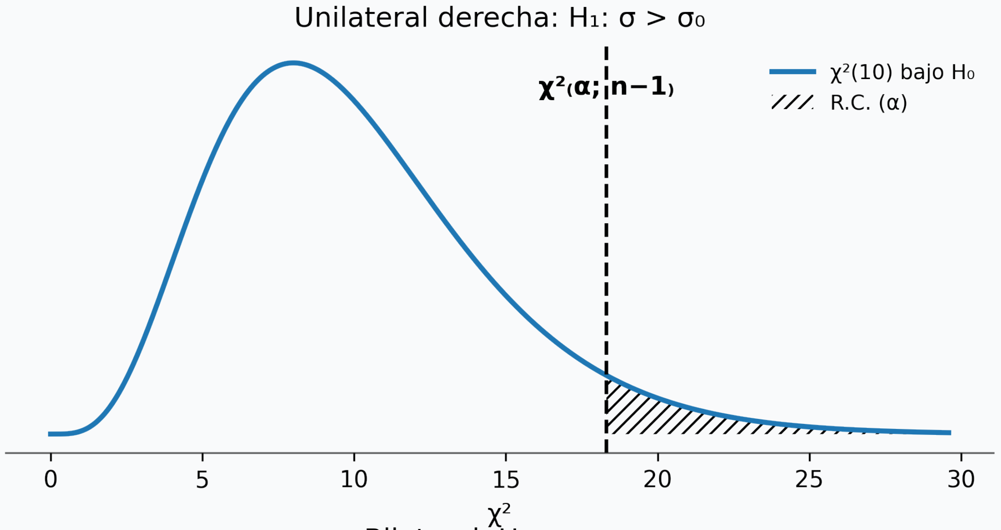
$$\chi^2 = (n-1)\cdot S_1{}^2 \,/\, \sigma_0{}^2 = n \cdot S^2 \,/\, \sigma_0{}^2$$

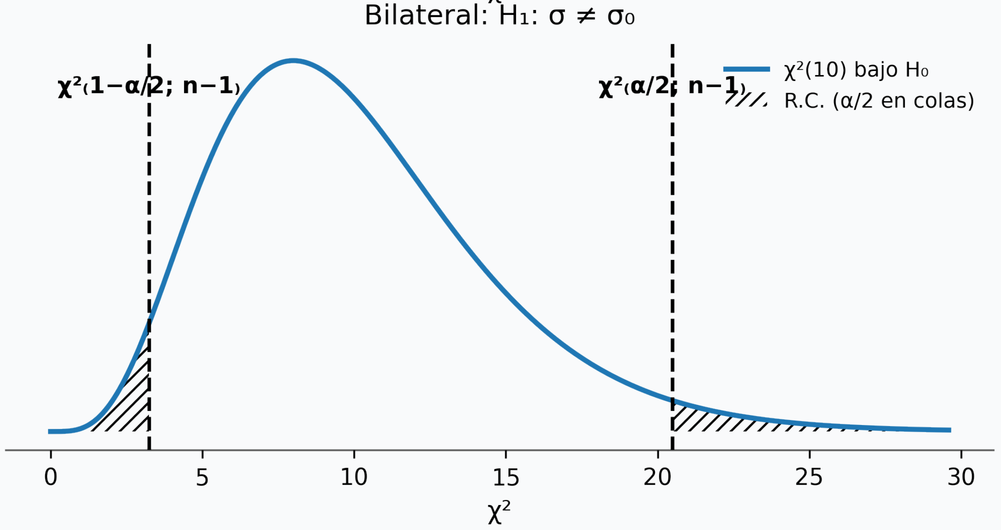
$$Bajo\ H_0:\ \chi^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

- **Unilateral derecha** ($H_1:\ \sigma > \sigma_0$)
  - **R.C.:** $\chi^2 \geq \chi^2_{\{\alpha;\, n-1\}}$
  - (cola derecha con probabilidad α)
- **Unilateral izquierda** ($H_1:\ \sigma < \sigma_0$)
  - **R.C.:** $\chi^2 \leq \chi^2_{\{1-\alpha;\, n-1\}}$
  - (cola izquierda con probabilidad α)
- **Bilateral** ($H_1:\ \sigma \neq \sigma_0$)
  - **R.C.:** $\chi^2 \leq \chi^2_{\left\{1-\frac{\alpha}{2};\, n-1\right\}}$ o $\chi^2 \geq \chi^2_{\left\{\frac{\alpha}{2};\, n-1\right\}}$

Nota práctica (importante)

La χ^2_{n-1} no es simétrica: en bilateral los dos valores críticos no son opuestos.





4.10 Ejemplo económico guiado (variabilidad, χ^2)

CORE

Contexto

Una empresa de logística quiere comprobar si la variabilidad del tiempo de entrega ha aumentado. Históricamente, la desviación típica era $\sigma_0 = 6$ (días).

Muestra aleatoria

$n = 20$ entregas

$S_1 = 7{,}5$ (por tanto $S_1^2 = 56{,}25$)

Hipótesis (unilateral derecha)

$H_0: \sigma = 6$

$H_1: \sigma > 6$

Nivel de significación

$\alpha = 0{,}05$

Estadístico χ^2

$$\chi^{2*} = (n-1) \cdot {S_1}^2 / {\sigma_0}^2$$

$\chi^{2*} = 19 \cdot 56{,}25 / 36 = 1.068{,}75 / 36 \approx 29{,}69$

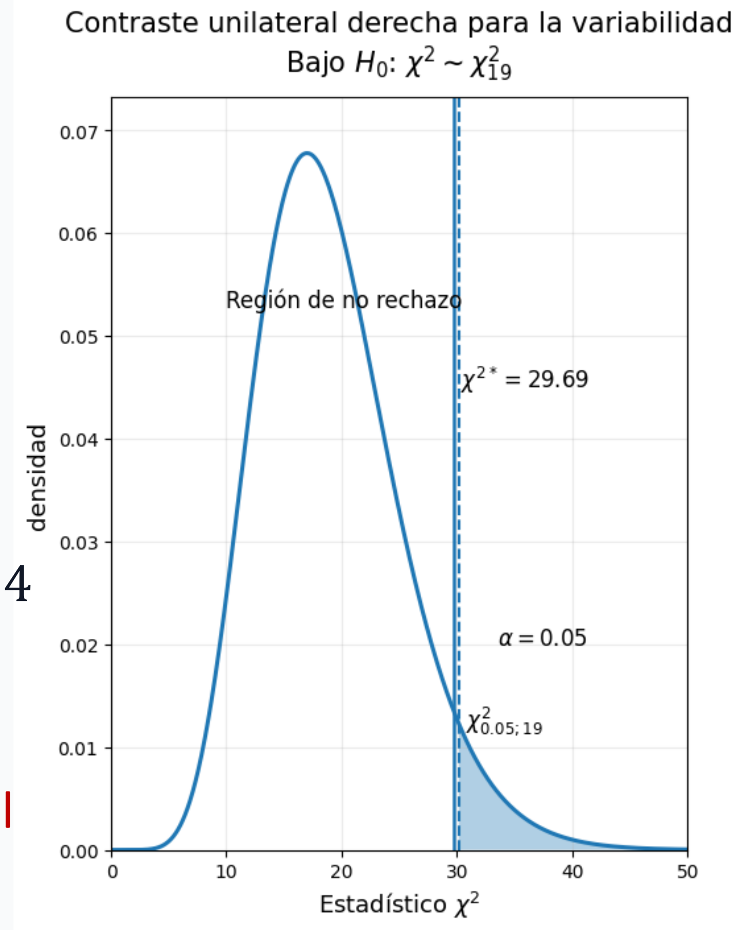
Decisión (unilateral derecha)

Bajo H_0: $\chi^2 \sim \chi^2_{19}$

Valor crítico (cola derecha): $\chi^2_{\{0{,}05;19\}} \approx 30{,}14$

Conclusión (en contexto)

Con $\alpha = 0{,}05$, la muestra no aporta evidencia suficiente para afirmar que la variabilidad del tiempo de entrega ha aumentado.



4.11 Otros contrastes importantes: igualdad de varianzas (F)

CORE

Objetivo: Comparar la variabilidad de dos poblaciones normales.

Hipótesis (caso típico, bilateral)

- $H_0\colon \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ frente
- $H_1\colon \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

Dato muestral clave: Cuasivarianzas

- S_{1X}^2 (muestra X, tamaño n)
- S_{1Y}^2 (muestra Y, tamaño m)

Estadístico de contraste (F)

$$F = \frac{S_{1X}^2}{S_{1Y}^2}$$

(convenio: ponemos la mayor arriba para que F ≥ 1)

Distribución bajo H_0

Si H_0 es cierta, entonces:

$F \sim F_{n-1,m-1}$(si el numerador corresponde a X)

Idea práctica: Este contraste se usa como contraste específico de varianzas (y es sensible a no normalidad).

4.12 Contraste F: regiones críticas (bilateral)

CORE

Recordatorio (bajo H_0)

$$F = \frac{S_{1X}^2}{S_{1Y}^2}$$

$F \sim F_{n-1,m-1}$ (si el numerador corresponde a X)

Caso bilateral

$$H_0: \sigma_X{}^2 = \sigma_Y{}^2;\ H_1: \sigma_X{}^2 \neq \sigma_Y{}^2$$

Regla de decisión (bilateral, dos colas)

Rechazamos H_0 si el cociente es "demasiado grande" o "demasiado pequeño".

Forma estándar (sin imponer F ≥ 1)

R.C.: $F \leq F_{\left\{1-\frac{\alpha}{2};\, n-1,m-1\right\}}$ o $F \geq F_{\left\{\frac{\alpha}{2};\, n-1,m-1\right\}}$

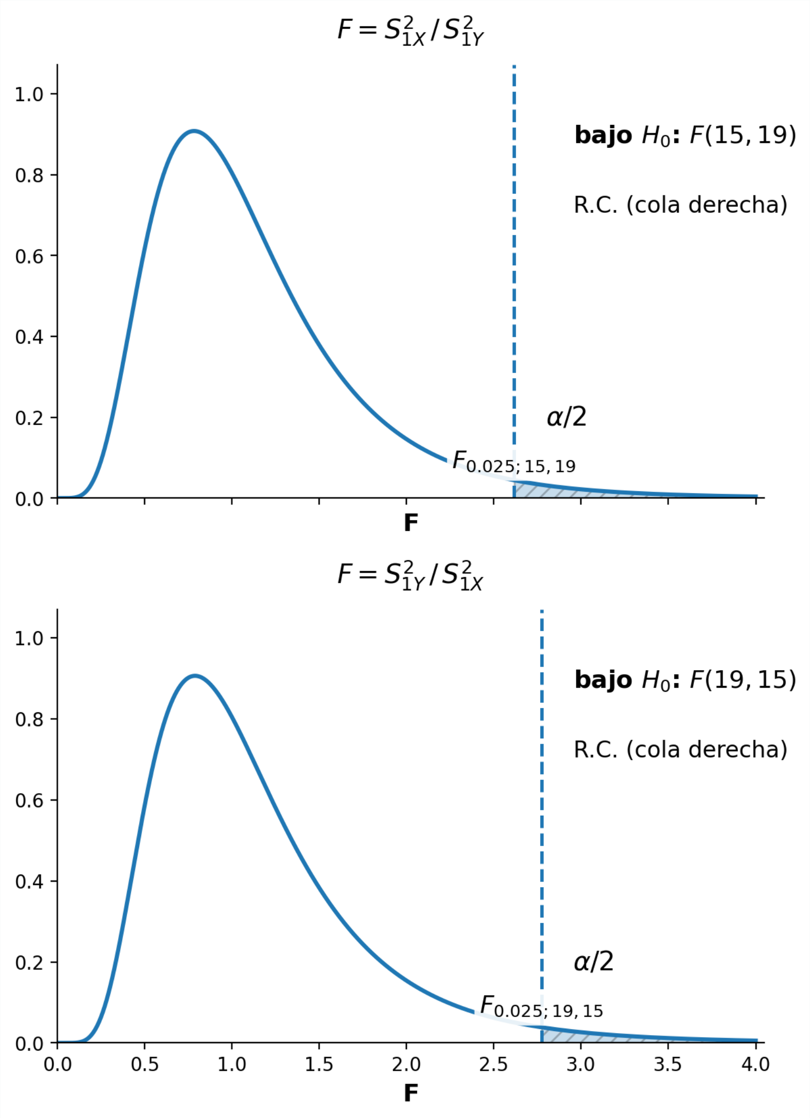
Convenio habitual en clase (poner la mayor arriba $\Rightarrow F \geq 1$)

Si definimos F = (mayor cuasivarianza)/(menor cuasivarianza), entonces basta con la cola derecha:

R.C.: $F \geq F_{\left\{\frac{\alpha}{2};\, n-1,m-1\right\}}$

Nota práctica

i inviertes el cociente, cambian los grados de libertad (numerador/denominador).



4.13 Contraste F: detalle práctico del cociente y de los grados de libertad

CORE

Idea clave

En la distribución F, los grados de libertad dependen del orden del cociente:

Si **definimos**

$$F \;=\; S_{1X}^2\,/S_{1Y}^2$$

entonces, bajo H_0:

$$F \sim F_{n-1,m-1}$$

(n−1 en el numerador, m−1 en el denominador)

Si invertimos el cociente

$$F' \;=\; S_{1Y}^2\,/S_{1X}^2$$

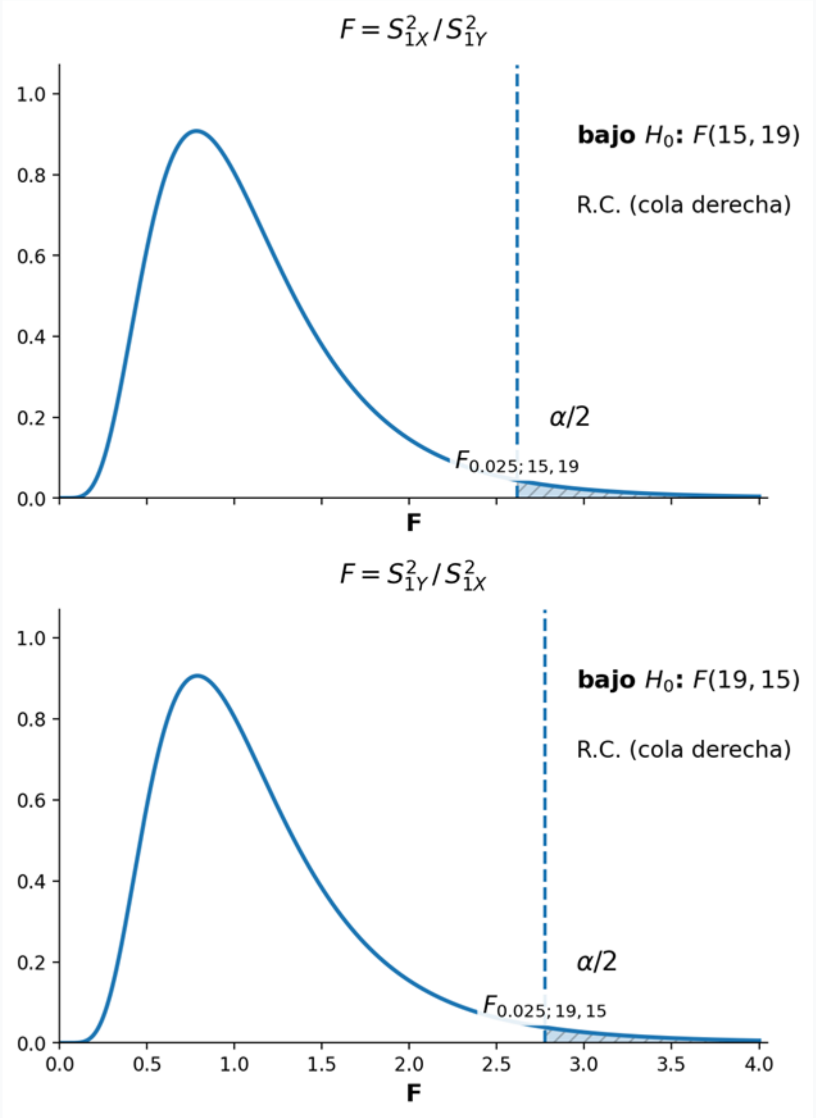
entonces:

$$F' \sim F_{m-1,n-1}$$

Convenio para contrastes bilaterales

Para simplificar, a menudo se define F = (mayor cuasivarianza)/(menor cuasivarianza), de modo que F ≥ 1.

En ese caso, la región crítica se expresa solo en la cola derecha (**pero usando α/2**).



4.14 Ejemplo económico guiado (igualdad de varianzas, F)

CORE

Contexto

Dos centros logísticos (X e Y) quieren comparar si la variabilidad del tiempo de entrega es la misma (se asume normalidad).

Muestra aleatoria

Muestra X: tamaño n = 16, S_{1X} = 5,0

Muestra Y: tamaño m = 21, $S_{1Y} = 3{,}8$

Hipótesis (bilateral)

$$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$$
$$H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$$

Nivel de significación

α = 0,05

Estadístico F (S_1 mayor arriba para que F ≥ 1)

$$F^* = S_{1X}^2 / S_{1Y}^2$$
$$F^* = 5{,}0^2 / 3{,}8^2 = 25 / 14{,}44 \approx 1{,}73$$

Distribución bajo H₀

$$F \sim F_{n-1,m-1} = F(15,20)$$

Decisión (bilateral, cola derecha con α/2)

Valor crítico: $F_{\left\{\frac{\alpha}{2};15,20\right\}} = F_{\{0{,}025;15{,}20\}} = 2{,}573$

Como $\boldsymbol{F^*} < \boldsymbol{F_{\{0{,}025;15{,}20\}}}$ → no rechazamos H₀.

Conclusión (en contexto)

Con α = 0,05, la muestra no aporta evidencia suficiente para afirmar que la variabilidad difiere entre los dos centros logísticos.

4.15 Test rápido (Varianza y F)

CORE

1. **En el contraste de igualdad de varianzas, si definimos $F = S_{1X}^2 / S_{1Y}^2$, ¿cuáles son los grados de libertad bajo H_0?**
   a) F(n, m)
   b) F(n−1, m−1)
   c) F(m−1, n−1)
   d) χ^2(n−1)
2. **En un contraste F bilateral con α = 0,05 y usando el convenio F ≥ 1, la regla correcta es**:
   a) Rechazar H_0 si F* ≥ F_{0,05; n−1, m−1}
   b) Rechazar H_0 si F* ≥ F_{0,025; n−1, m−1}
   c) Rechazar H_0 si F* ≤ F_{0,025; n−1, m−1}
   d) No se puede usar cola derecha
3. **Si al intercambiar el cociente usas $F' = S_{1Y}^2 / S_{1X}^2$, entonces bajo H_0**:
   a) La distribución no cambia
   b) Cambian los grados de libertad: F'(m−1, n−1)
   c) Cambian los grados de libertad: F'(n−1, m−1)
   d) Se convierte en una χ^2

4.15 Test rápido (Varianza y F)

CORE

1. **En el contraste de igualdad de varianzas, si definimos $F = S_{1X}^2 / S_{1Y}^2$, ¿cuáles son los grados de libertad bajo H_0?**
   a) F(n, m)
   b) F(n−1, m−1) ✅
   c) F(m−1, n−1)
   d) χ^2(n−1)
2. **En un contraste F bilateral con α = 0,05 y usando el convenio F ≥ 1, la regla correcta es**:
   a) Rechazar H_0 si F* ≥ F_{0,05; n−1, m−1}
   b) Rechazar H_0 si F* ≥ F_{0,025; n−1, m−1} ✅
   c) Rechazar H_0 si F* ≤ F_{0,025; n−1, m−1}
   d) No se puede usar cola derecha
3. **Si al intercambiar el cociente usas $F' = S_{1Y}^2 / S_{1X}^2$, entonces bajo H_0**:
   a) La distribución no cambia
   b) Cambian los grados de libertad: F'(m−1, n−1) ✅
   c) Cambian los grados de libertad: F'(n−1, m−1)
   d) Se convierte en una χ^2

5. Contrastes de significación de una proporción

5.1 Contraste sobre π en una población B(1,π): aproximación normal (muestras grandes)

CORE

Contexto

- Observamos una variable dicotómica (éxito/fracaso) con parámetro poblacional π.
- En una muestra aleatoria de tamaño n, la proporción muestral es p.

Hipótesis (ejemplos)

- **Bilateral**: H_0: $\pi = \pi_0$ frente a H_1: $\pi \neq \pi_0$
- Unilateral **derecha**: H_0: $\pi = \pi_0$ frente a H_1: $\pi > \pi_0$
- Unilateral **izquierda**: H_0: $\pi = \pi_0$ frente a H^1: $\pi < \pi^0$

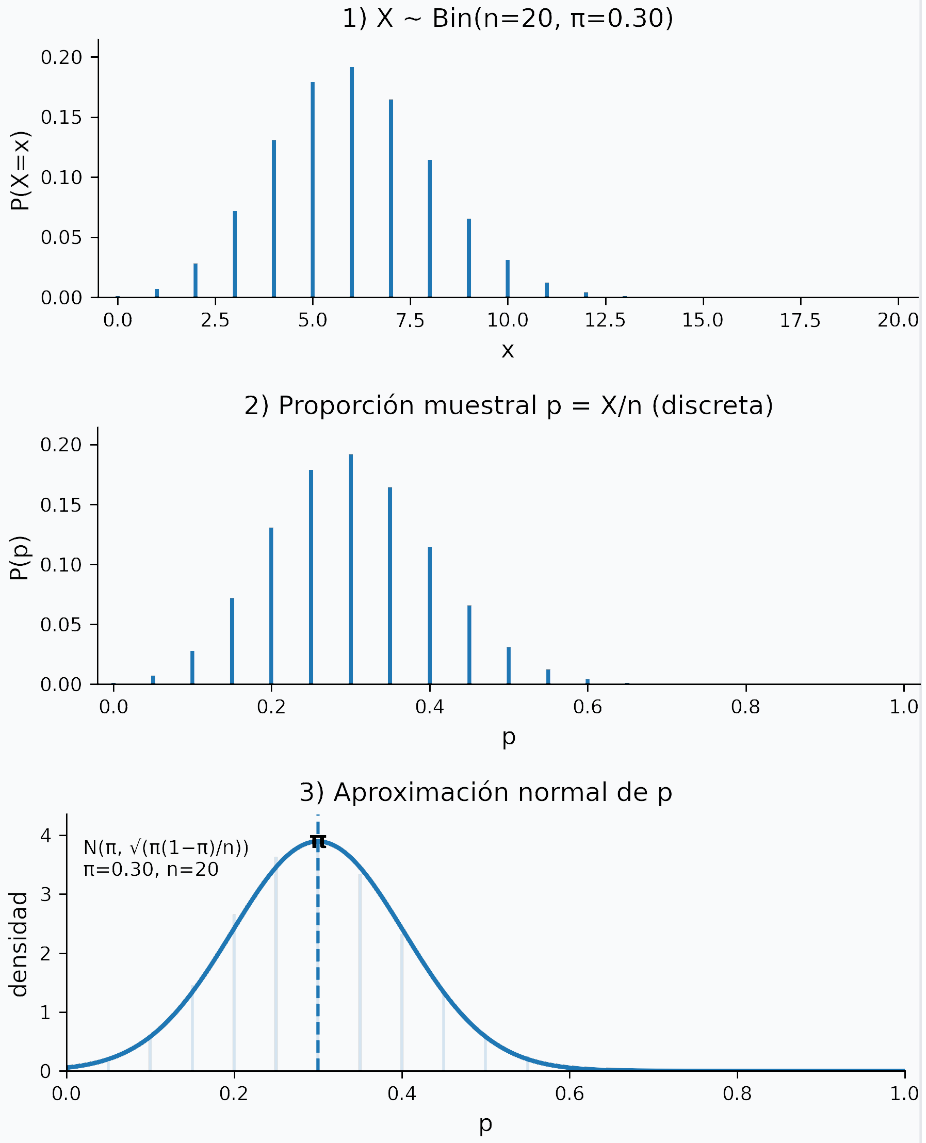
Idea (muestras grandes)

Si n es grande, p se aproxima por una normal y podemos usar un contraste tipo z.

Estadístico de contraste (aprox.)

$$z = \frac{(p - \pi_0)}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$$

Distribución bajo H₀ : Si H₀ es cierta y la aproximación es válida, $z \sim N(0,1)$.



5.2 Regla práctica para usar la aproximación normal en proporciones

CORE

Para usar el contraste tipo z en proporciones, necesitamos que la aproximación normal sea razonable.

Regla práctica (con H_0: $\pi = \pi_0$) **comprobar**:

- $n\pi_0 \geq 10$
- $n(1-\pi_0) \geq 10$

Interpretación

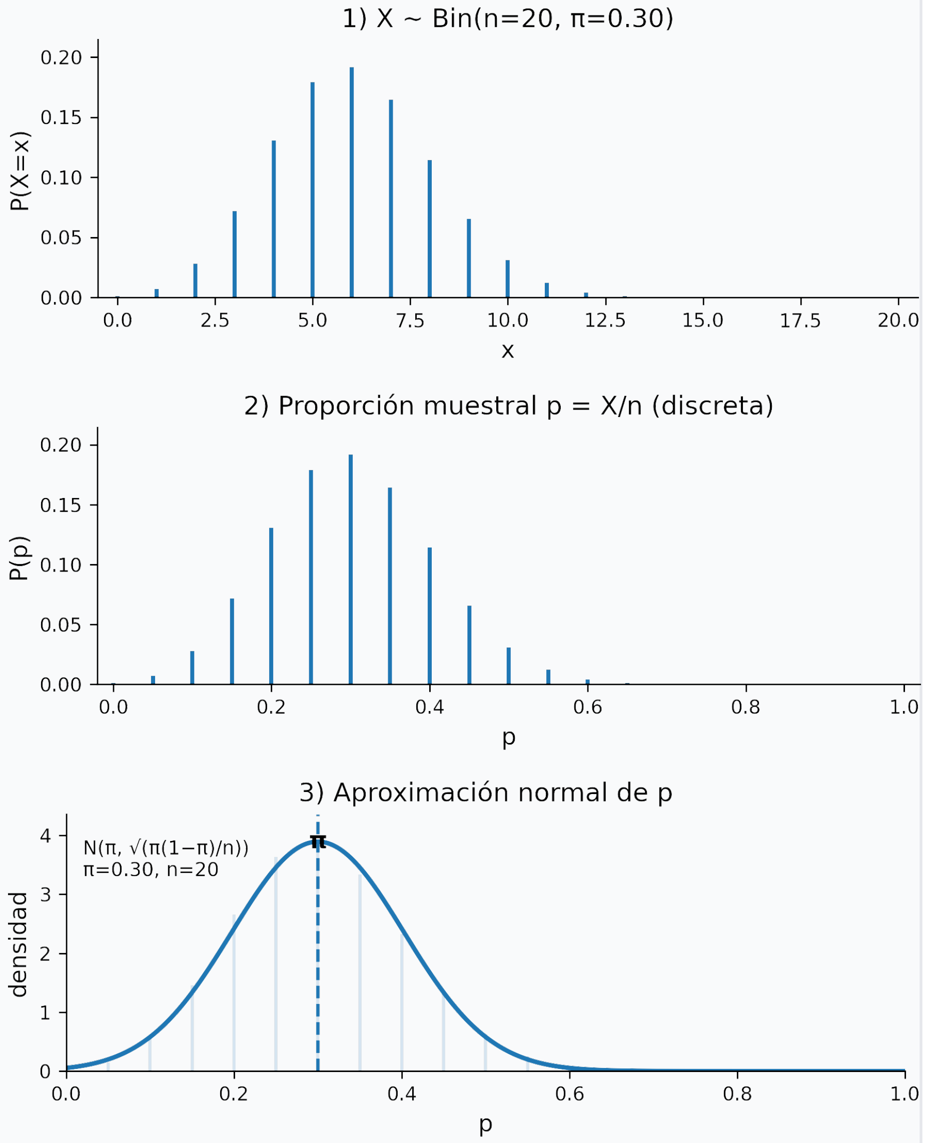
Bajo H_0, esperamos al menos 10 "éxitos" y 10 "fracasos".

Nota

Si estas condiciones no se cumplen, la aproximación normal puede ser mala y conviene usar un contraste exacto (binomial) o un método alternativo.

En el ejemplo del gráfico ($n = 20, \pi_0 = 0{,}30$):

$n \cdot \pi_0 = 6$ y $n \cdot (1-\pi_0) = 14 \rightarrow$ no se cumple $n \cdot \pi_0 \geq 10$, así que la aproximación normal no es recomendable aquí.

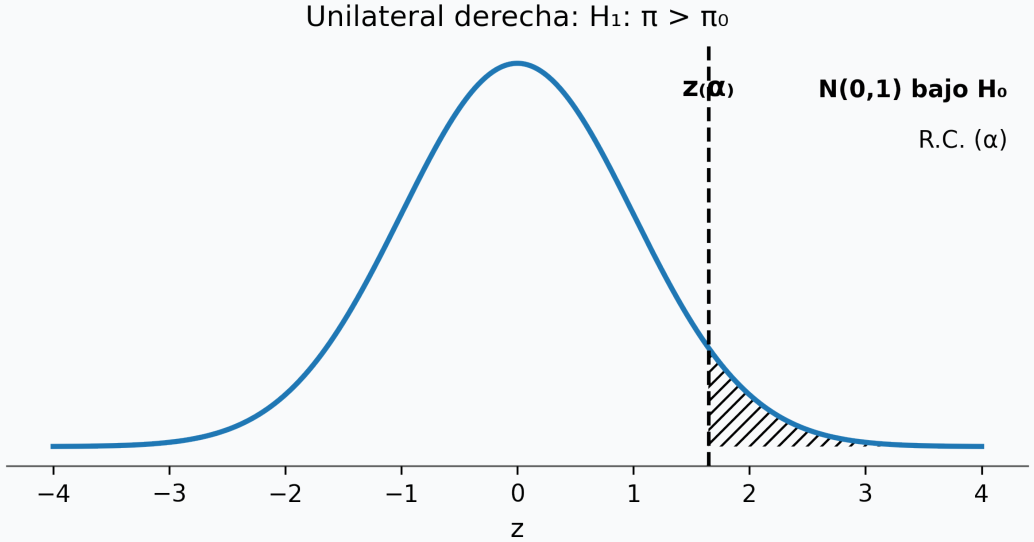


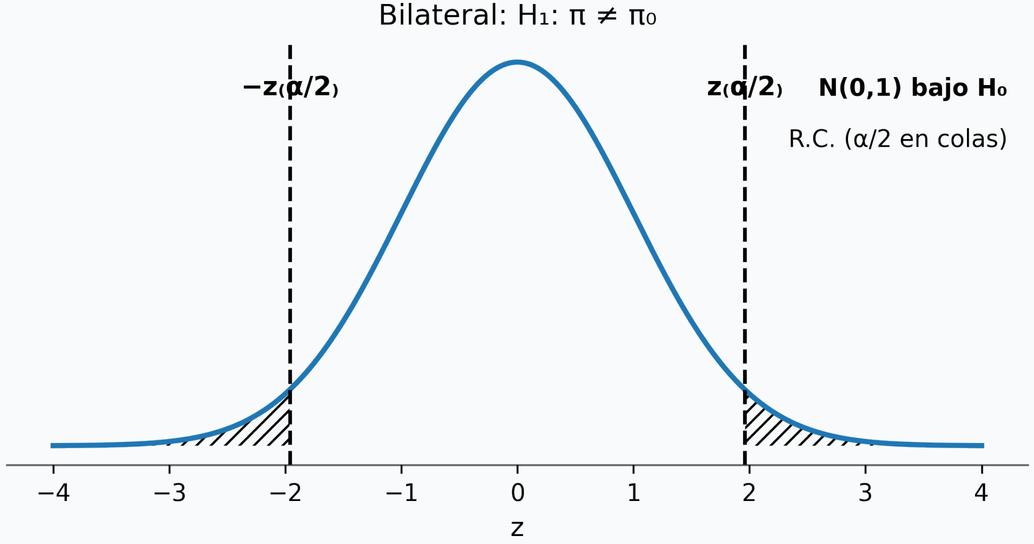
5.3 Contraste sobre π: regla de decisión (z)

CORE

Fijamos el nivel de significación α y usamos $N(0,1)$.

- Unilateral **derecha** (H_1: $\pi > \pi_0$)
  - R.C.: $z \geq z_{\{\alpha\}}$
- Unilateral **izquierda** (H_1: $\pi < \pi_0$)
  - R.C.: $z \leq -z_{\{\alpha\}}$
- **Bilateral** (H_1: $\pi \neq \pi_0$)
  - R.C.: $|z| \geq z_{\left\{\frac{\alpha}{2}\right\}}$





Recordatorio del estadístico (aprox.)

$$z = \frac{(p - \pi_0)}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$$

Interpretación en contexto

Rechazar H_0 significa que la muestra aporta evidencia suficiente, al nivel α, de que π difiere (o es mayor/menor) que π_0.

5.4 Ejemplo económico guiado (π, aproximación normal)

CORE

Contexto

Una tienda online quiere comprobar si la proporción de pedidos entregados en 24h ha superado el 80%.

Muestra aleatoria

n = 200 pedidos

En 170 pedidos se entregó en 24h

$p = 170/200 = 0{,}85$

Hipótesis (unilateral derecha)

$H_0: \pi = 0{,}80$

$H_1: \pi > 0{,}80$

Nivel de significación

$\alpha = 0{,}05$

Comprobación de aproximación (bajo H_0)

$n \cdot \pi_0 = 200 \cdot 0{,}80 = 160 \geq 10$

$n \cdot (1-\pi_0) = 200 \cdot 0{,}20 = 40 \geq 10$

→ aproximación normal razonable.

Estadístico z (aprox.)

$$z* = (p - \pi_0) / (\sqrt{(\pi_0(1-\pi_0)}/n)$$

$$z* = (0{,}85 - 0{,}80) / \sqrt{(0{,}80 \cdot 0{,}20/200)} =$$

$z^* = 0{,}05 / \sqrt{(0{,}0008)} = 0{,}05 / 0{,}0283 \approx 1{,}77$

Decisión

Valor crítico: $z_{\{0,05\}} \approx 1{,}645$

Como $1{,}77 \geq 1{,}645$ → rechazamos H_0.

Conclusión (en contexto)

Con $\alpha = 0{,}05$, la muestra aporta evidencia suficiente para afirmar que la proporción de entregas en 24h es superior al 80%.

5.5 Test rápido (Proporciones, una población)

CORE

1. **Condición práctica para usar aproximación normal en el contraste H_0: $\pi = \pi_0$:**
   a) $n \geq 30$
   b) $n \cdot p \geq 10$ y $n \cdot (1-p) \geq 10$
   c) $n \cdot \pi_0 \geq 10$ y $n \cdot (1-\pi_0) \geq 10$
   d) $\pi_0 \geq 0{,}5$
2. **En un contraste unilateral derecha H_1: $\pi > \pi_0$, la región crítica es:**
   1. $z^* < -z_\alpha$
   2. $z^* > -z_\alpha$
   3. $|z^*| > z_{\alpha/2}$)
   4. $z^* > z_\alpha$
3. **Si $z^* = 1{,}77$ y $\alpha = 0{,}05$ (unilateral derecha), entonces:**
   a) Rechazamos H_0
   b) No rechazamos H_0
   c) Depende de n
   d) Solo se puede decidir con p-valor

5.5 Test rápido (Proporciones, una población)

CORE

1. **Condición práctica para usar aproximación normal en el contraste H_0: $\pi = \pi_0$:**
   a) $n \geq 30$
   b) $n \cdot p \geq 10$ y $n \cdot (1-p) \geq 10$
   c) $n \cdot \pi_0 \geq 10$ y $n \cdot (1-\pi_0) \geq 10$ ✅
   d) $\pi_0 \geq 0{,}5$
2. **En un contraste unilateral derecha H_1: $\pi > \pi_0$, la región crítica es:**
   1. $z^* < -z_\alpha$
   2. $z^* > -z_\alpha$ ✅
   3. $|z^*| > z_{\alpha/2}$)
   4. $z^* > z_\alpha$
3. **Si $z^* = 1{,}77$ y $\alpha = 0{,}05$ (unilateral derecha), entonces:**
   a) Rechazamos H_0 ✅
   b) No rechazamos H_0
   c) Depende de n
   d) Solo se puede decidir con p-valor

5.6 Contraste exacto binomial para π (cuando no se cumple la regla práctica)

PLUS

Contexto

- Variable dicotómica (éxito/fracaso).
- X = número de éxitos en n observaciones, con $X \sim B(n, \pi)$.

Hipótesis (ejemplos)

- H_0: $\pi = \pi_0$
- H_1: $\pi > \pi_0$ (o $\pi < \pi_0$, o $\pi \neq \pi_0$)

p-valor exacto (bajo H_0)

Si **no** es razonable aproximar con **normal**, usamos **la distribución binomial bajo H_0** y calculamos el p-valor exacto.

Estadístico de contraste (aprox.)

- Si H_1: $\pi > \pi_0 \rightarrow p - valor = P(X \geq x_{obs} \mid \pi = \pi_0)$
- Si H_1: $\pi < \pi_0 \rightarrow p - valor = P(X \leq x_{obs} \mid \pi = \pi_0)$

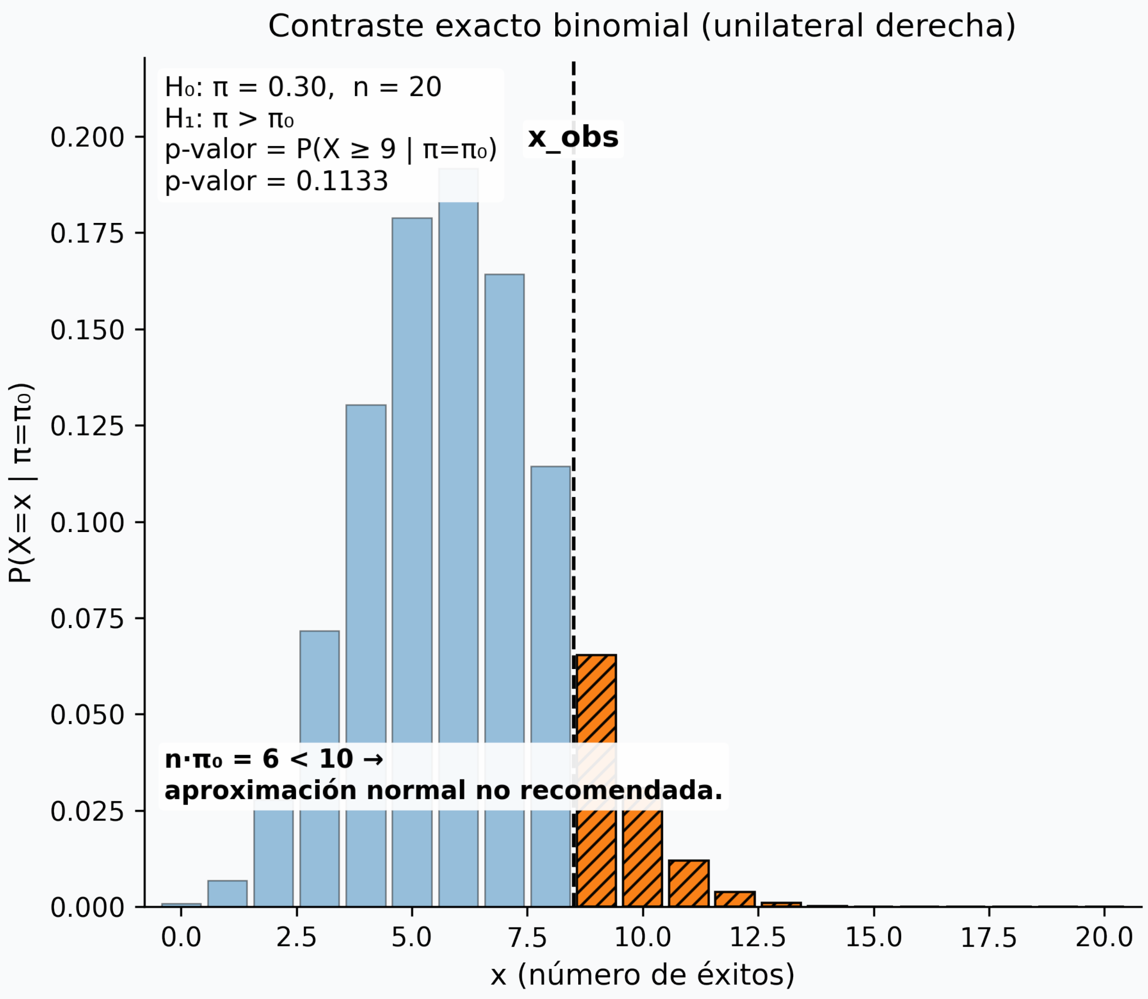
Caso bilateral (idea):

- H_1: $\pi \neq \pi_0$ → p-valor = suma de probabilidades de resultados “tan extremos” como x_{obs} bajo H_0.

Decisión

Si p-valor ≤ α → rechazamos H_0.

Si p-valor > α → no rechazamos H_0.



5.7 Ejemplo económico guiado (contraste exacto binomial para π)

PLUS

Contexto

Una plataforma de comercio electrónico quiere comprobar si la proporción de clientes que contratan un servicio premium de entrega urgente ha aumentado respecto al valor histórico del 20%.

Muestra aleatoria

n = 20 pedidos; $x_{obs} = 7$ clientes contrataron premium.

Hipótesis (unilateral derecha)

H_0: π = 0,20

H_1: π > 0,20

Nivel de significación

α = 0,05

Comprobación de aproximación (bajo H_0)

$n \cdot \pi_0 = 20 \cdot 0,2 = 4 < 10$

$n \cdot (1 - \pi_0) = 20 \cdot 0,8 = 16 \geq 10$

→ aproximación normal no es razonable.

Modelo exacto bajo $H0$:

$$x \sim B(20; 0,2)$$

Con $x_{obs} = 7$, el **p-valor exacto** es :

$$p - valor = P(X \geq 7 \mid \pi = 0,20) =$$

$$= \sum_{x=7}^{20} \binom{20}{x} 0,2^x 0,8^{20-x} \approx 0,0867$$

Decisión

Con α=0,05:

Como $0,0867 > 0,05 \rightarrow$ no rechazamos H_0.

Conclusión (en contexto)

Con α = 0,05, la muestra no aporta evidencia suficiente para afirmar que la proporción de clientes que contratan el servicio premium ha aumentado respecto al 20%

6. Contrastes en dos poblaciones (diferencias)

6.1 Diferencia de medias en normales con σ conocidas (z): planteamiento

CORE

Contexto

Dos poblaciones normales:

$X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ y $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ con σ_x y σ_Y conocidas.

Muestras aleatorias independientes

- Muestra X de tamaño n → media muestral $\bar{x}$
- Muestra Y de tamaño m → media muestral $\bar{y}$

Parámetro de interés

$\Delta = \mu_x - \mu_Y$

Hipótesis Nula (referencia)

$H_0: \Delta = 0$

Hipótesis Alternativas (según el objetivo)

- Bilateral: $H_1\!: \ \Delta \neq 0$
- Unilateral derecha: $H_1\!: \ \Delta > 0$
- Unilateral izquierda: $H_1\!: \ \Delta < 0$

Estadístico de contraste (z)

$$z = \frac{[(\bar{\bar{x}} - \bar{y}) - 0]}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)}}$$

Distribución bajo H_0

Si H_0 es cierta, entonces $z \sim N(0,1)$.

6.2 Contraste z para $\Delta = \mu_X - \mu_Y$: regla de decisión

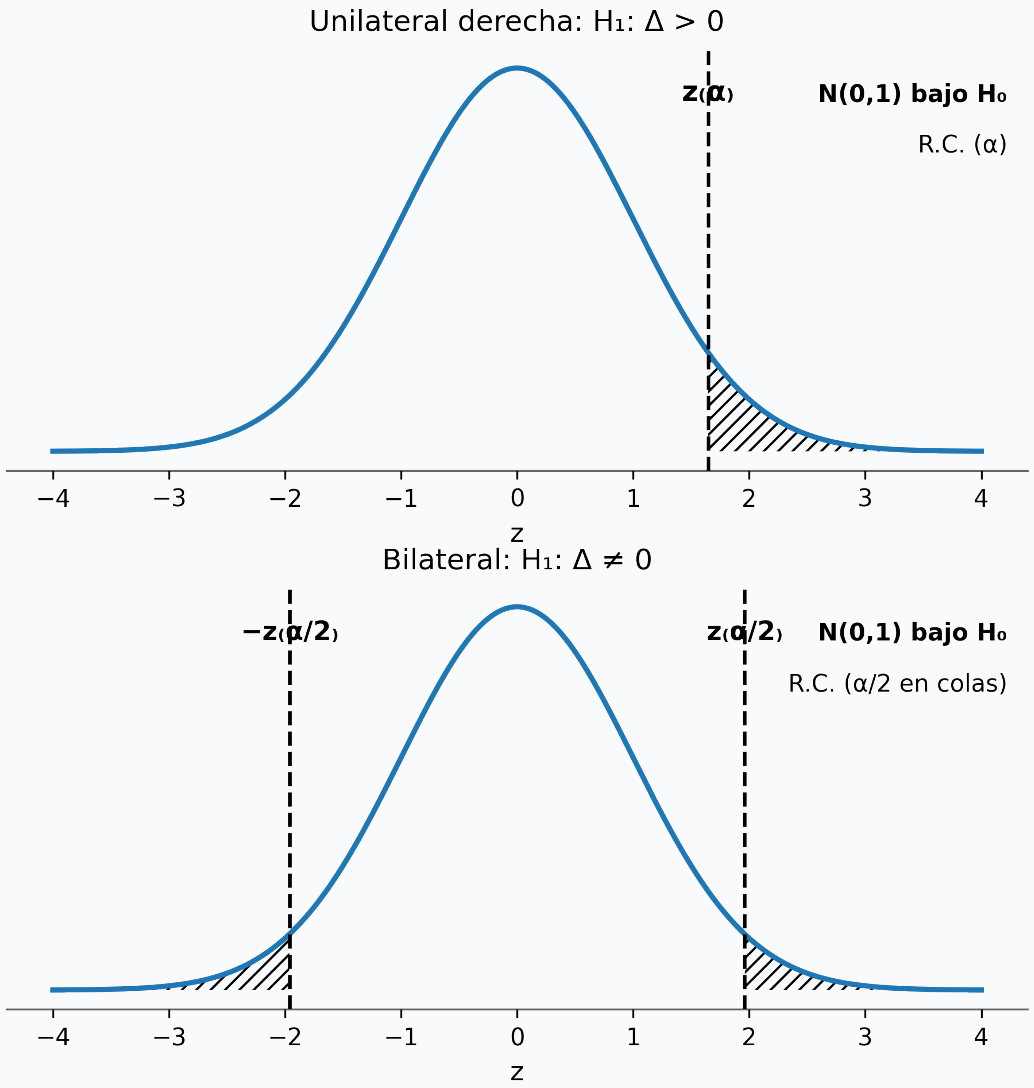
CORE

Fijamos el nivel de significación α y usamos N(0,1) para obtener valores críticos.

- Unilateral **derecha** ($H_1: \Delta > 0$)
  - **R.C.**: $z \geq z_{\{\alpha\}}$
- Unilateral izquierda ($H_1: \Delta < 0$)
  - **R.C.**: $z \leq -z_{\{\alpha\}}$
- Bilateral ($H_1: \Delta \neq 0$)
  - **R.C.**: $|z| \geq z_{\left\{\frac{\alpha}{2}\right\}}$

Interpretación en contexto

Si rechazamos H_0, concluimos que hay evidencia muestral suficiente, al nivel α, de que **las medias poblacionales difieren** (o de que Δ es positiva/negativa).



6.3 Ejemplo económico guiado (dos medias, σ conocidas, z)

CORE

Contexto: Dos tiendas (X e Y) comparan el gasto medio por compra (en €). Se asume normalidad y se conocen las desviaciones típicas poblacionales.

Datos

Muestra X: $n = 64$, $\bar{x} = 42{,}1$, $\sigma_x = 12$

Muestra Y: $m = 49$, $\bar{y} = 39{,}8$, $\sigma_y = 10$

Hipótesis (unilateral derecha)

$H_0: \mu_x - \mu_y = 0$

$H_1: \mu_x - \mu_y > 0$

Nivel de significación

$\alpha = 0{,}05$

Estadístico z (aprox.)

$$z^* = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{\sigma_Y^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$$

$$z^* = \frac{(42{,}1 - 39{,}8)}{\sqrt{\frac{12^2}{64} + \frac{10^2}{49}}} = \frac{2{,}3}{\sqrt{\frac{144}{64} + \frac{100}{49}}} = \frac{2{,}3}{\sqrt{2{,}25 + 2{,}04}} = \frac{2{,}3}{\sqrt{4{,}29}} = \frac{2{,}3}{2{,}07} \approx 1{,}11 .$$

Decisión

Valor crítico: $z_{\{0,05\}} \approx 1{,}645$

Como $1{,}11 < 1{,}645 \rightarrow$ no rechazamos H_0.

Conclusión (en contexto)

Con $\alpha = 0{,}05$, la muestra no aporta evidencia suficiente para afirmar que el gasto medio en X sea mayor que en Y.

6.4 Diferencia de medias en normales con σ desconocidas pero iguales (t combinada): planteamiento

CORE

Contexto

Dos poblaciones normales:

$X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ y $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ con σ_x y σ_Y conocidas.

Muestras aleatorias independientes

- Muestra X de tamaño n → $\bar{x}, S_{1X}^2$
- Muestra Y de tamaño m → $\bar{y}, S_{1Y}^2$

Parámetro de interés

$\Delta = \mu_x - \mu_Y$

Hipótesis nula

H_0: $\Delta = 0$

Hipótesis Alternativas (según el objetivo)

• **Bilateral**: H_1: $\Delta \neq 0$; • Unilateral **derecha**: H_1: $\Delta > 0$

• Unilateral **izquierda**: H_1: $\Delta < 0$

Varianza combinada (pooled)

$$S_p^2 = \frac{\left[(n-1)\cdot S_{1X}^2 + (m-1)\cdot S_{1Y}^2\right]}{(n+m-2)}$$

Estadístico de contraste (z)

$$t = \frac{[(\bar{\bar{x}} - \bar{y}) - 0]}{S_p\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}$$

Distribución bajo H_0

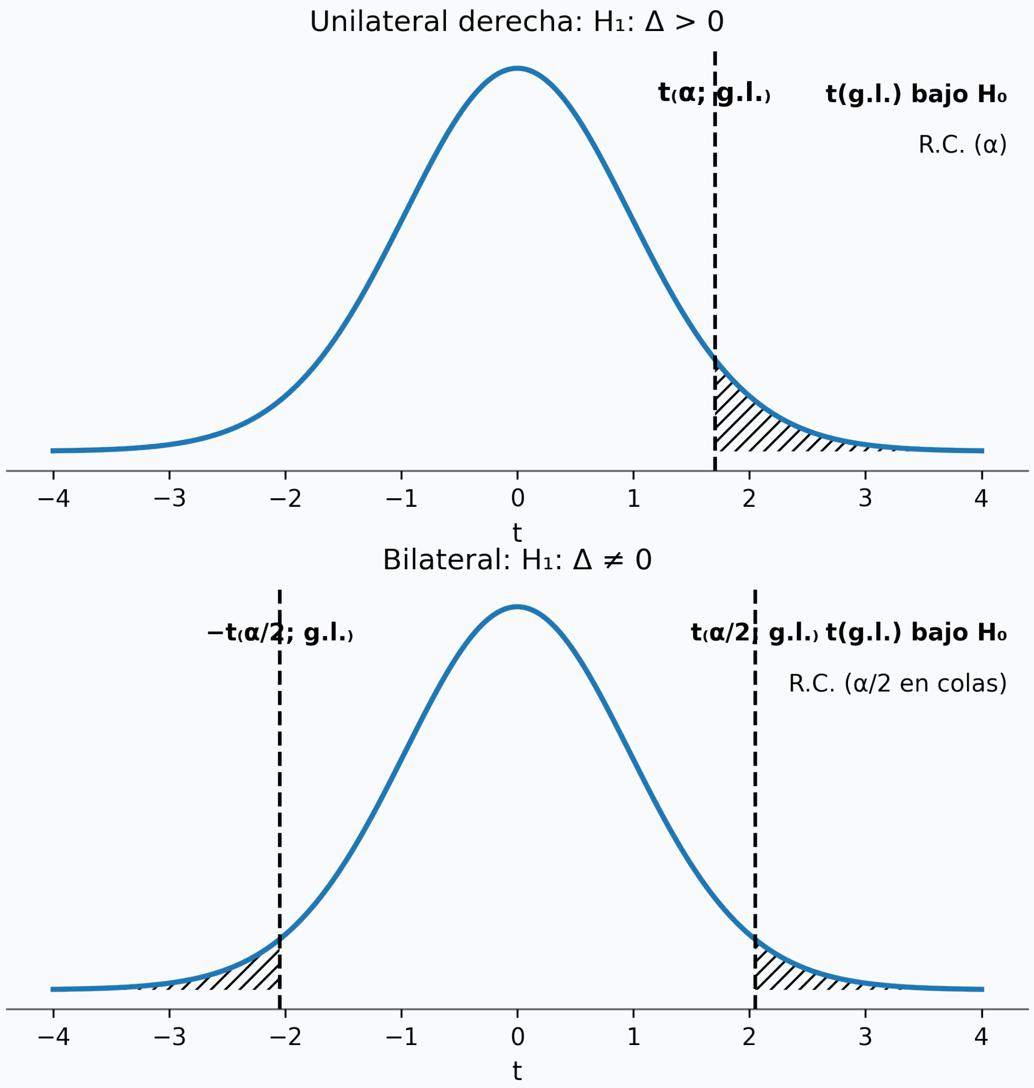
Si H_0 es cierta, entonces $t \sim t(n+m-2)$.

6.5 Contraste t para $\Delta = \mu_x - \mu_y$: grados de libertad y decisión

CORE

Fijamos el nivel de significación α y usamos
$t \sim t_{n+m-2}$ bajo H_0 para obtener valores críticos.

- Unilateral **derecha** (H_1: $\Delta > 0$)
  - **R.C.**: $z \geq t_{\{\alpha;\, n+m-2\}}$
- Unilateral **izquierda** (H_1: $\Delta < 0$)
  - **R.C.**: $z \leq t_{\{\alpha;\, n+m-2\}}$
- **Bilateral** (H_1: $\Delta \neq 0$)
  - **R.C.**: $|z| \geq t_{\left\{\frac{\alpha}{2};\, n+m-2\right\}}$



Interpretación en contexto

Si rechazamos H_0, concluimos que hay evidencia muestral suficiente, al nivel α, de que **las medias poblacionales difieren** (o de que Δ es positiva/negativa).

6.6 Ejemplo económico guiado (dos medias, σ desconocidas e iguales)

CORE

Contexto: Dos grupos de estudiantes (X e Y) comparan el tiempo medio semanal (en horas) dedicado a estudio. Se asume normalidad aproximada y varianzas poblacionales iguales (pero desconocidas).

Muestras aleatorias independientes

Grupo X: n = 12, $\bar{x}$ = 14,2, S_{1X} = 2,4

Grupo Y: m = 10, $\bar{y}$ = 12,9, S_{1Y} = 2,1

Hipótesis (unilateral derecha)

H_0: $\mu_x - \mu_y = 0$

H_1: $\mu_x - \mu_y > 0$

Nivel de significación

α = 0,05

Varianza combinada

$$S_p^2 = \frac{[\,(n-1)\cdot S_{1X}^2 + (m-1)\cdot S_{1Y}^2]}{n + m - 2}$$

S_p^2 = [11·(2,4²) + 9·(2,1²)] / 20= 5,1525 → S_p ≈ 2,27

Estadístico t

$$t^* = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

t* = (14,2 − 12,9) / [2,27 · √(1/12 + 1/10)]= 1,3 / 0,972 ≈ 1,34

Decisión

Grados de libertad: n + m − 2 = 20

Valor crítico: t_{0,05;20} ≈ 1,725

Como 1,34 < 1,725 → no rechazamos H_0.

Conclusión (en contexto)

Con α = 0,05, la muestra no aporta evidencia suficiente para afirmar que el gasto medio en X sea mayor que en Y.

6.7 Contraste para medias apareadas (t de Student)

CORE

Contexto: Se usa cuando las **observaciones vienen emparejadas dos a dos** sobre las mismas unidades: antes / después, mismo individuo en dos momentos, misma empresa con dos métodos, mismo producto valorado en dos condiciones.

Idea clave

No contrastamos dos medias independientes, sino la media de las diferencias.

Definimos, para cada par:

$D_i = X_i - Y_i \quad (i = 1, \dots, n)$ y

trabajamos con la muestra de diferencias $D_1, \dots, D_n$.

Hipótesis (caso bilateral)

$$H_0: \mu_D = \mu_{D,0}$$

$$H_1: \mu_D \neq \mu_{D,0}$$

Supuesto clave

Las diferencias D_i proceden de una población aproximadamente normal (o, con n moderado/grande, sin asimetrías extremas).

Estadístico t (σ_D desconocida)

$$t = \frac{\bar{D} - \mu_{D,0}}{\frac{S_{1D}}{\sqrt{n}}}$$

donde:

- $\bar{D}$: media muestral de las diferencias,
- S_{1D}: cuasidesviación típica de las diferencias.

Distribución bajo H_0:

Si H_0 es cierta:

$$t \sim t_{n-1}$$

Lectura docente

Este contraste es, en esencia, un contraste para una media, pero aplicado a la variable diferencia D.

6.8 Ejemplo económico guiado (medias apareadas)

CORE

Contexto: Una cadena minorista quiere evaluar si un nuevo sistema de reposición reduce el tiempo medio de rotura de stock en tienda. En 10 establecimientos, se mide el número de horas semanales de rotura antes y después de implantar el sistema.

Definimos:

$$D = x_{i,antes} - x_{i,después}$$

Si el nuevo sistema mejora, esperamos $D > 0$.

Datos:

$$n = 10, \overline{D} = 1{,}8, S_{1D} = 2{,}4 \, .$$

Hipótesis (unilateral derecha)

$H_0\!: \mu_D = 0$

$H_1\!: \mu_D > 0$

Nivel de significación

$\alpha = 0{,}05$

Estadístico t

$$t^* = \frac{\overline{D} - 0}{\frac{S_{1D}}{\sqrt{n}}} = \frac{1{,}8}{2{,}4/\sqrt{10}} = \frac{1{,}8}{0{,}759} \approx 2{,}37$$

Distribución bajo H_0: $\mathrm{t} \sim \mathrm{t}_9$

Decisión

Valor crítico: t_{0,05;9} ≈ 1,833

Como 2,37 > 1,833 → rechazamos H_0.

Conclusión (en contexto)

Con α = 0,05, la muestra aporta evidencia suficiente para afirmar que el nuevo sistema de reposición reduce el tiempo medio de rotura de stock en tienda.

6.9 Dos medias con muestras grandes (aprox. normal)

PLUS

Contexto

Dos poblaciones normales:

$X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ y $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$

con σ_x y σ_Y desconocidas.

Muestras aleatorias independientes

- Muestra X de tamaño n → $\bar{x}, S_{1X}^2$
- Muestra Y de tamaño m → $\bar{y}, S_{1Y}^2$

Parámetro de interés

$\Delta = \mu_x - \mu_Y$

Hipótesis nula

H_0: Δ = 0

H_1: Δ ≠ 0 (o unilateral)

Idea (muestras grandes)

Si n y m son grandes, $(\bar{x} - \bar{y})$ se aproxima por una normal y podemos usar un contraste tipo z.

Estadístico de contraste (z)

$$z = \frac{[(\bar{\bar{x}} - \bar{y}) - 0]}{\sqrt{\left(\frac{S_{1X}^2}{n} + \frac{S_{1Y}^2}{m}\right)}}$$

Distribución bajo H_0

Bajo H_0, $z \sim N(0,1)$ (aprox.) si n y m son grandes.

Regla de decisión (igual que en z):

- unilateral: comparar con $z_{\{\alpha\}}$
- bilateral: comparar |z| con $z_{\alpha/2}$

6.10 Welch: diferencia de medias sin igualdad de varianzas

ANEXO

Contexto

Dos poblaciones normales:

$X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ y $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$

con σ_x y σ_Y desconocidas y distintas.

Muestras aleatorias independientes

- Muestra X de tamaño n → $\bar{x}, S_{1X}^2$
- Muestra Y de tamaño m → $\bar{y}, S_{1Y}^2$

Parámetro de interés

$\Delta = \mu_x - \mu_Y$

Hipótesis nula

H_0: $\Delta = 0$

H_1: $\Delta \neq 0$ (o unilateral)

Estadístico de contraste (z)

$$t = \frac{[(\bar{\bar{x}} - \bar{y}) - 0]}{\sqrt{\left(\frac{S_{1X}^2}{n} + \frac{S_{1Y}^2}{m}\right)}}$$

Grados de libertad (aprox., Welch–Satterthwaite)

$$\nu \approx \frac{(S_{1X}^2/n + S_{1Y}^2/m)^2}{\left[(S_{1X}^2/n)^2/(n-1) + (S_{1Y}^2/m)^2/(m-1)\right]}$$

Decisión: Usar t(v):

• bilateral: $|t*| \geq t_{\alpha/2;\nu}$

• unilateral: comparar con $t_{\alpha/2;\nu}$ (con el signo adecuado)

Nota docente: Welch evita imponer $\sigma_x^2 = \sigma_Y^2$ y suele ser más robusto cuando las varianzas difieren.

6.11 Diferencia de proporciones ($\pi_1 - \pi_2$): planteamiento

CORE

Contexto

Comparamos dos poblaciones con variable dicotómica:

- $\xi_1: B(1, \pi_1)$ y m.a.s(n)
- $\xi_2: B(1, \pi_2)$ y m.a.s(m)

Proporciones (de éxitos) muestrales

- $p_1 = x_1 / n$
- $p_2 = x_2 / m$

Parámetro de interés

$$\Delta = \pi_1 - \pi_2$$

Hipótesis Nula (referencia)

H_0: $\Delta\,\pi = 0$

Hipótesis Alternativas (según el objetivo)

- Bilateral: H_1: $\Delta\pi \neq 0$
- Unilateral derecha: H_1: $\Delta(\pi) > 0$
- Unilateral izquierda: H_1: $\Delta(\pi) < 0$

Idea: Con **n y m grandes**, $p_1 - p_2$ se aproxima por una normal y podemos usar un contraste tipo z.

Definimos la **proporción combinada (bajo H_0)**:

$$p = \frac{x_1 + x_2}{n + m}$$

Estadístico de contraste (z)

$$z = \frac{[(p_1 - p_2) - 0]}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}$$

Distribución bajo H_0 (si la aproximación es válida)

Si H_0 es cierta, entonces $z \sim N(0,1)$.

6.12 Diferencia de proporciones: regla práctica y regla de decisión

CORE

Regla práctica (aproximación normal, bajo H_0: $\pi_1 = \pi_2$)

Comprobar que, con $p = \frac{x_1 + x_2}{n+m}$, se cumple:

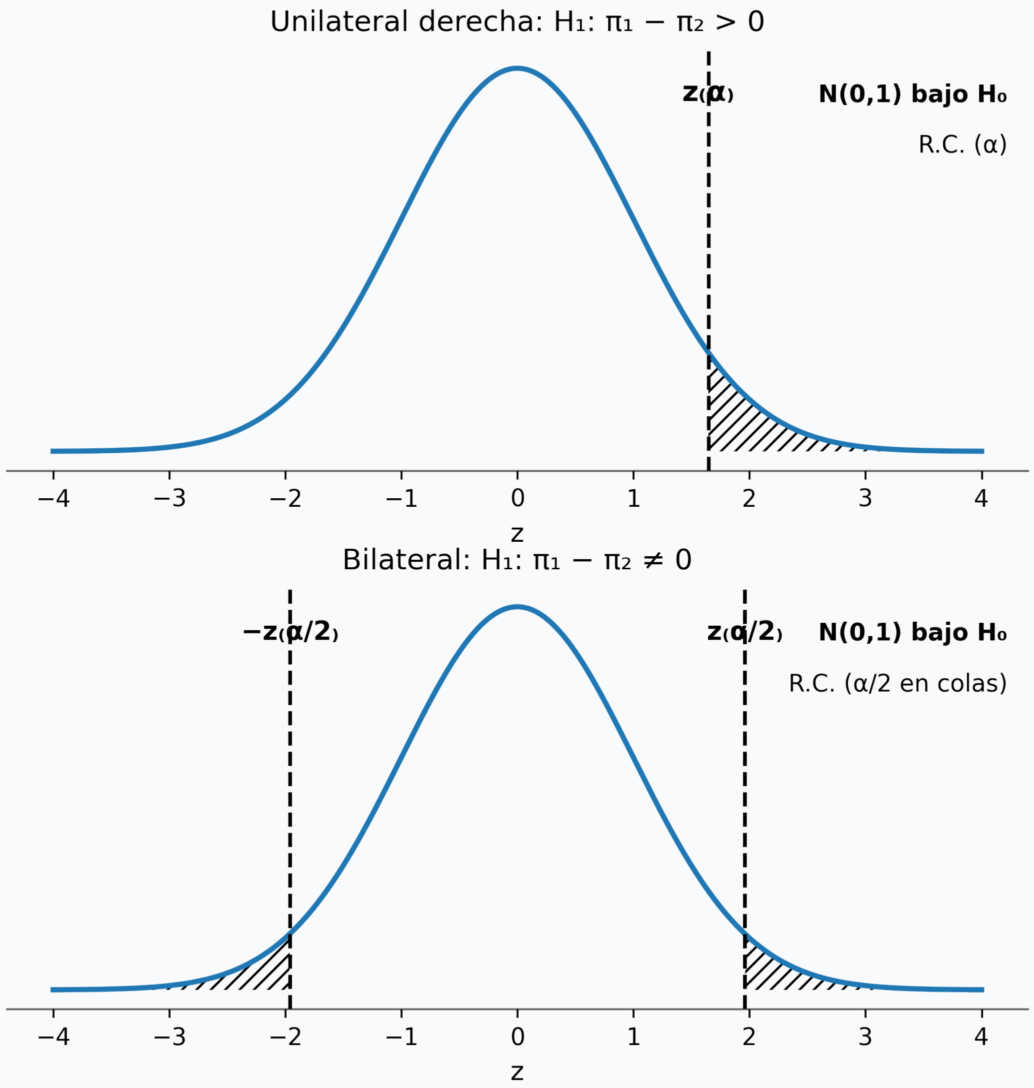
- $(n+m)\cdot p \geq 10$
- $(n+m)\cdot(1-p) \geq 10$

Estadístico de contraste (pooled, bajo H_0)

$$z = \frac{[(p_1 - p_2) - 0]}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}$$

Regla de decisión (N(0,1))

- Unilateral **derecha** (H_1: $\pi_1 - \pi_2 > 0$)
  - R.C.: $z \geq z_{\{\alpha\}}$
- Unilateral **izquierda** (H_1: $\pi_1 - \pi_2 < 0$)
  - R.C.: $z \leq -z_{\{\alpha\}}$
- **Bilateral** (H_1: $\pi_1 - \pi_2 \neq 0$)
  - R.C.: $|z| \geq z_{\left\{\frac{\alpha}{2}\right\}}$



6.13 Ejemplo económico guiado (dos proporciones, contraste z pooled)

CORE

Contexto: Dos campañas de marketing (A y B) comparan la tasa de conversión (compra / no compra).

Muestras aleatorias independientes

Campaña A: n = 300, compras x_1 = 72 → p_1 = 72/300 = 0,24

Campaña B: m = 250, compras x_2 = 45 → p_2 = 45/250 = 0,18

Hipótesis (bilateral)

$H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0$

$H_1: \pi_1 - \pi_2 \neq 0$

Nivel de significación

$\alpha = 0{,}05$

Proporción combinada (bajo H_0)

p = (x_1 + x_2) / (n + m)= (72 + 45) / (300 + 250)= 117 / 550

p ≈ 0,213

Comprobación práctica (aprox. normal)

- (n+m)·p = 550·0,213 ≈ 117 ≥ 10
- (n+m)·(1−p) = 550·0,787 ≈ 433 ≥ 10

Estadístico z

$$z = \frac{[(p_1 - p_2) - 0]}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}$$

$$z^* = \frac{(0{,}24 - 0{,}18)}{\sqrt{0{,}213 \cdot 0{,}787 \cdot \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{250}\right)}} = \frac{0{,}06}{0{,}0351} \approx 1{,}71\ .$$

Decisión (bilateral)

Valor crítico: $z_{\{0{,}025\}} \approx 1{,}96$

Como |1,71| < 1,96 → no rechazamos H_0.

Conclusión (en contexto)

Con α = 0,05, la muestra no aporta evidencia suficiente para afirmar que las tasas de conversión difieran entre A y B.

6.14 Test rápido (Dos poblaciones: diferencias)

CORE

1. En el contraste de dos medias con σ_x y σ_y conocidas, el estadístico es:
   a) $t = (\bar{x} - \bar{y}) / \left[S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right]$
   b) $z = (\bar{x} - \bar{y}) / \sqrt{\frac{\sigma_x{}^2}{n} + \frac{\sigma_y{}^2}{m}}$
   c) $\chi^2 = (n-1) \cdot S_1^2 / \sigma_0^2$
   d) $F = \frac{S_{1x}^2}{S_{1y}^2}$
2. En el contraste de dos medias con σ desconocidas pero iguales, los grados de libertad son:
   a) n−1
   b) m−1
   c) n+m−2
   d) n+m
3. En el contraste de dos proporciones con $H_0\colon \pi_1 = \pi_2$, la desviación típica bajo H_0 se calcula usando:
   a) p_1 y p_2 por separado
   b) la proporción combinada $p = (x_1+x_2)/(n+m)$
   c) π_1 y π_2 conocidas
   d) la distribución t
4. En un contraste bilateral con α = 0,05, la regla crítica en z es:
   a) $z \geq z_{\{0,05\}}$
   b) $z \leq -z_{\{0,05\}}$
   c) $|z| \geq z_{\{0,025\}}$
   d) $|z| \geq z_{\{0,05\}}$

6.15 Test rápido (Dos poblaciones: diferencias)

CORE

1. En el contraste de dos medias con σ_x y σ_y conocidas, el estadístico es:
   - *a)* $t = (\bar{x} - \bar{y}) / \left[S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right]$
   - b) $z = (\bar{x} - \bar{y}) / \sqrt{\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}}$ ✅
   - c) $\chi^2 = (n-1) \cdot S_1^2 / \sigma_0^2$
   - d) $F = \frac{S_{1x}^2}{S_{1y}^2}$
2. En el contraste de dos medias con σ desconocidas pero iguales, los grados de libertad son:
   - a) n−1
   - b) m−1
   - c) n+m−2 ✅
   - d) n+m
3. En el contraste de dos proporciones con H_0: $\pi_1 = \pi_2$, la desviación típica bajo H_0 se calcula usando:
   - a) p_1 y p_2 por separado
   - b) la proporción combinada $p = (x_1+x_2)/(n+m)$ ✅
   - c) π_1 y π_2 conocidas
   - d) la distribución t
4. En un contraste bilateral con α = 0,05, la regla crítica en z es:
   - a) $z \geq z_{\{0,05\}}$
   - b) $z \leq -z_{\{0,05\}}$
   - c) $|z| \geq z_{\{0,025\}}$ ✅
   - d) $|z| \geq z_{\{0,05\}}$

7. Relación entre contrastes e intervalos de confianza

7.1 Relación entre contraste bilateral e intervalo de confianza

CORE

Idea clave (caso bilateral)

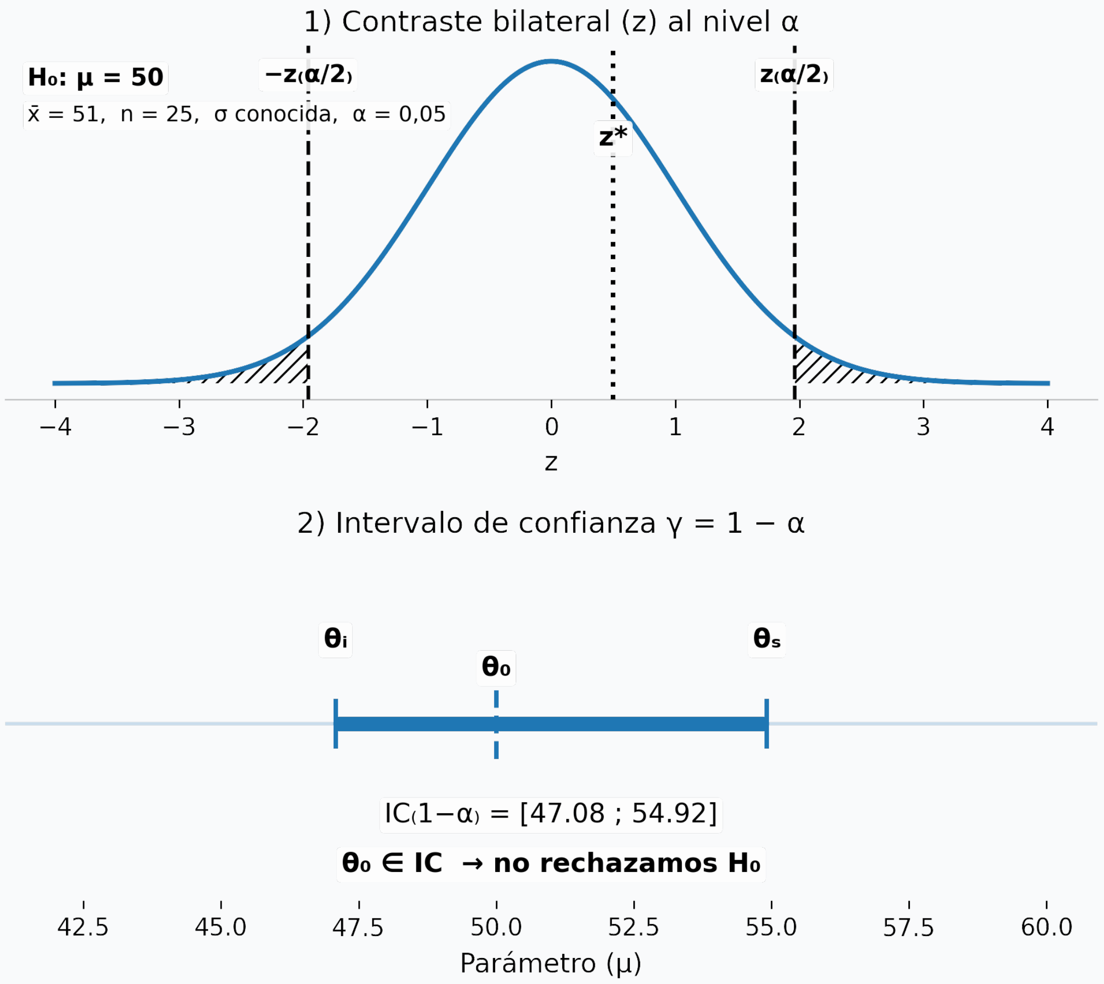
Contrastar $H_0\colon\ \theta = \theta_0$ frente a $H_1\colon\ \theta \neq \theta_0$ con nivel de significación α es equivalente a comprobar si θ_0 pertenece al intervalo de confianza de nivel γ = 1 – α.

Regla práctica

- Si θ_0 está **dentro** del $IC_{\{1-\alpha\}}$ → **no rechazamos** H₀.
- Si θ_0 está **fuera** del $IC_{\{1-\alpha\}}$ → **rechazamos** H₀.

Nota

El IC recoge los valores del parámetro que son compatibles con la muestra al nivel de confianza γ.



7.2 Ejemplo corto (decisión con IC)

CORE

Datos del ejemplo

$\mu_0 = 50$, $\bar{x} = 51$, $n = 25$, σ conocida, $\alpha = 0{,}05 \rightarrow \gamma = 0{,}95$

Intervalo de confianza $(\gamma = 0{,}95)$

$$IC_{0,95}(\mu) = \left[\bar{x} - z_{0,025} \cdot (\sigma/\sqrt{n})\,;\, \bar{x} + z_{0,025} \cdot (\sigma/\sqrt{n})\right]$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$IC_{0,95}(\mu) = [51 - 1{,}96 \cdot 2\,;\, 51 + 1{,}96 \cdot 2] = [47{,}08\,;\, 54{,}92]$$

Contraste equivalente (bilateral)

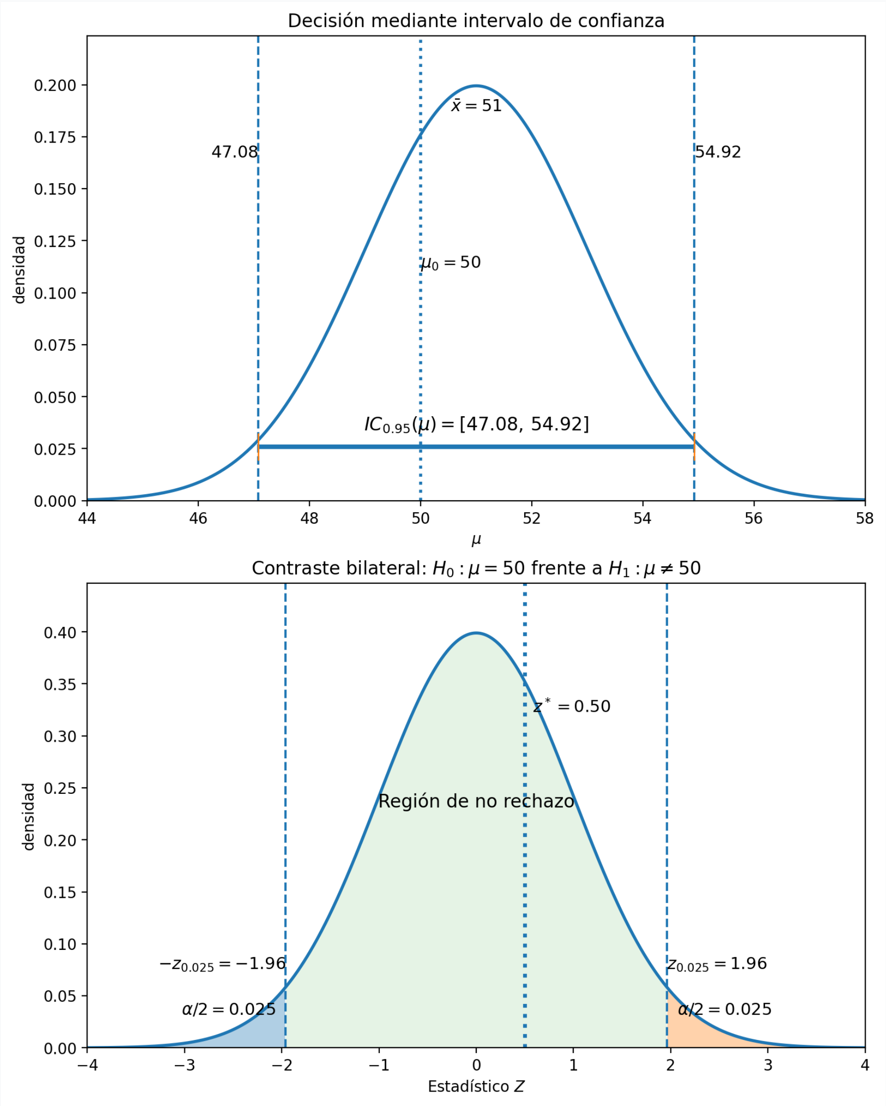
- H_0: $\mu = 50$
- H_1: $\mu \neq 50$

Decisión por IC

Como 50 pertenece a [47,08 ; 54,92] → no rechazamos H_0.

Conclusión (en contexto)

Con $\alpha = 0{,}05$, la muestra no aporta evidencia suficiente para afirmar que μ difiera de 50.



7.3 Ventajas y límites de la equivalencia IC–contraste

CORE

Ventaja principal

En **contrastes bilaterales**, el IC permite decidir H_0 de **forma directa**:

- θ_0 **dentro** del $IC_{\{1-\alpha\}}$ → **no rechazamos** H_0
- θ_0 **fuera** del $IC_{\{1-\alpha\}}$ → **rechazamos** H_0

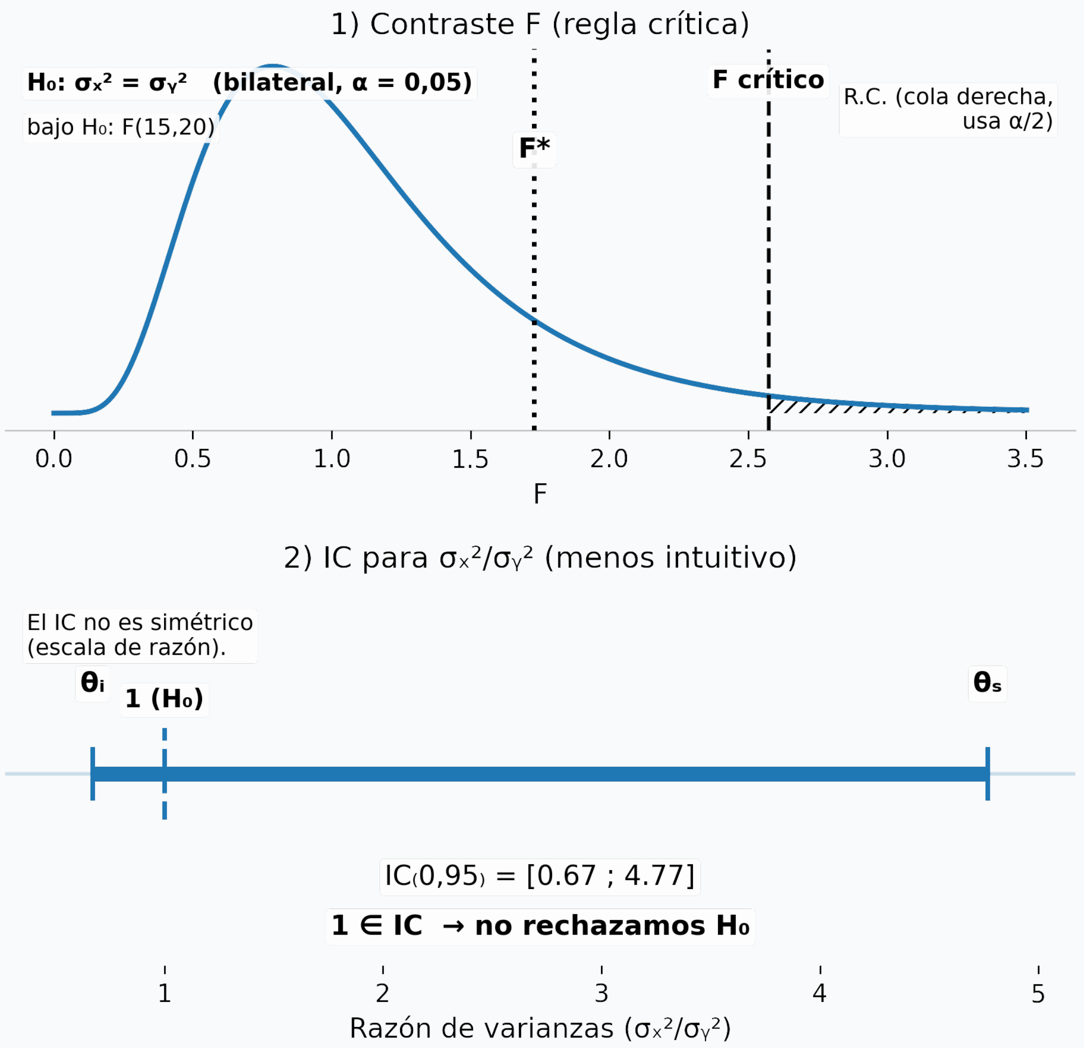
Qué aporta además el IC

No solo decide: también da un **rango verosímil** para el parámetro:

- **Tamaño del efecto**: la distancia entre θ_0 y el centro del intervalo indica la magnitud aproximada de la diferencia observada.
- **Precisión** (tamaño del intervalo).
- **Sentido del efecto**: si todo el IC queda por encima (o por debajo) de θ_0, sugiere que el parámetro es mayor (o menor) que θ_0.

Límites (importante)

- En **contrastes unilaterales**, la relación existe, pero el **IC asociado es unilateral**.
- En **algunos contrastes** (p. ej., varianzas, F), **la interpretación del IC puede ser menos intuitiva que la del contraste**.



7.4 Test rápido (IC y contraste)

CORE

1. En un contraste bilateral con nivel de significación α, se cumple:
   a) El IC asociado tiene nivel $\gamma = \alpha$
   b) El IC asociado tiene nivel $\gamma = 1 - \alpha$
   c) El IC asociado tiene nivel $\gamma = 1 - \alpha/2$
   d) No existe relación
2. Si θ_0 pertenece al $IC_{\{1-\alpha\}}$, entonces:
   a) Rechazamos H_0
   b) No rechazamos H_0
   c) Depende de si el contraste es unilateral
   d) No se puede decidir
3. Si todo el $IC_{\{1-\alpha\}}$ queda por encima de θ_0, esto sugiere:
   a) No hay efecto
   b) El parámetro es menor que θ_0
   c) El parámetro es mayor que θ_0
   d) Que H_0 es verdadera

7.4 Test rápido (IC y contraste)

CORE

1. En un contraste bilateral con nivel de significación α, se cumple:
   a) El IC asociado tiene nivel $\gamma = \alpha$
   b) El IC asociado tiene nivel $\gamma = 1 - \alpha$ ✅
   c) El IC asociado tiene nivel $\gamma = 1 - \alpha/2$
   d) No existe relación
2. Si θ_0 pertenece al $IC_{\{1-\alpha\}}$, entonces:
   a) Rechazamos H_0
   b) No rechazamos H_0 ✅
   c) Depende de si el contraste es unilateral
   d) No se puede decidir
3. Si todo el $IC_{\{1-\alpha\}}$ queda por encima de θ_0, esto sugiere:
   a) No hay efecto
   b) El parámetro es menor que θ_0
   c) El parámetro es mayor que θ_0 ✅
   d) Que H_0 es verdadera

8. Propiedades y panorama final

8.1 Propiedades de algunos contrastes: visión general

PLUS

Además de aplicar un contraste, nos interesa valorar su “calidad”.

Tres ideas clave (visión general)

- Nivel de **significación** (control de α)
- El contraste **se construye** fijando α para que, si **H_0 es cierta**: **P(rechazar H_0) = α**.
- **Potencia** (capacidad de detectar H_1) La potencia es P(rechazar H_0) cuando H_1 es cierta (depende del parámetro).

Criterios de buen comportamiento

Según el contexto, se buscan contrastes que sean:

- insesgados,
- consistentes,
- (en algunos casos) más potentes que otros bajo las mismas restricciones.

PLUS

8.2 Contraste insesgado (idea)

Idea

Un **contraste es insesgado si**, para cualquier valor del parámetro en la alternativa, la probabilidad de rechazar H_0 es al menos tan grande como cuando H_0 es cierta.

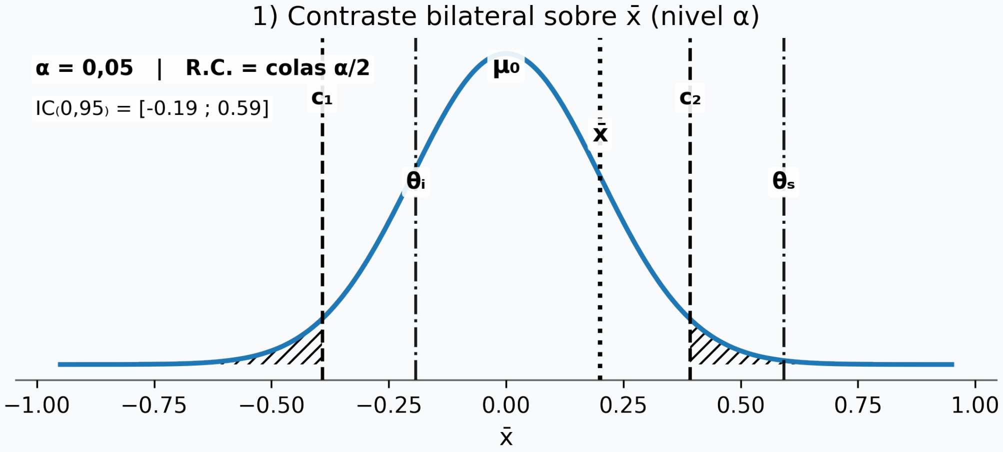
En forma simple

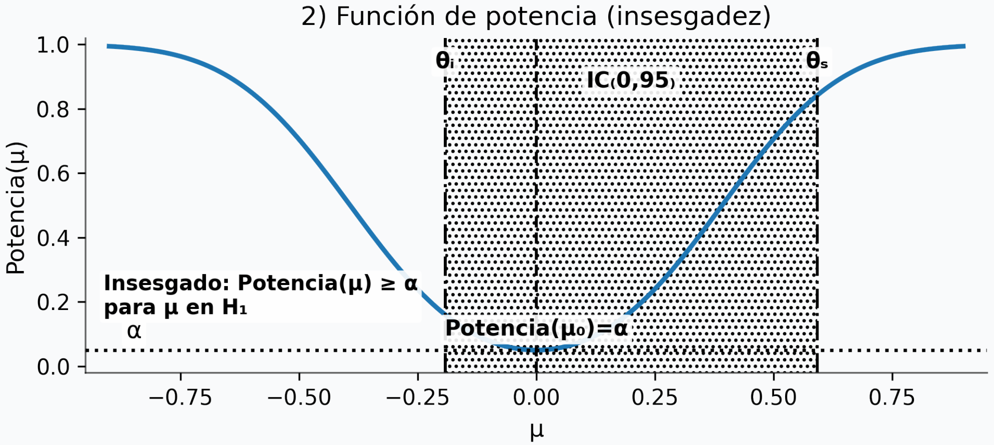
- Bajo H_0: $P(rechazar\ H_0) = \alpha$
- Bajo H_1: $P(rechazar\ H_0) \geq \alpha$ (para valores de H_1)

Interpretación docente

Un contraste insesgado no está "inclinado" a favorecer H_0: **cuando la realidad está en H_1, tiende a rechazar H_0** con mayor probabilidad que α.

Nota: En contrastes bilaterales clásicos, la condición de insesgadez suele guiar la forma de la región crítica.





- c_1, c_2: valores críticos del contraste (centrados en μ_0).
- θ_i, θ_s: extremos del IC (centrados en $\bar{x}$).
- Solo coinciden si $\bar{x} = \mu_0$.

8.3 Contraste consistente (idea)

PLUS

Idea

Un contraste es **consistente si**, cuando aumenta el tamaño muestral, la probabilidad de rechazar H_0 tiende a 1 **siempre que la realidad esté en H_1**.

En forma simple

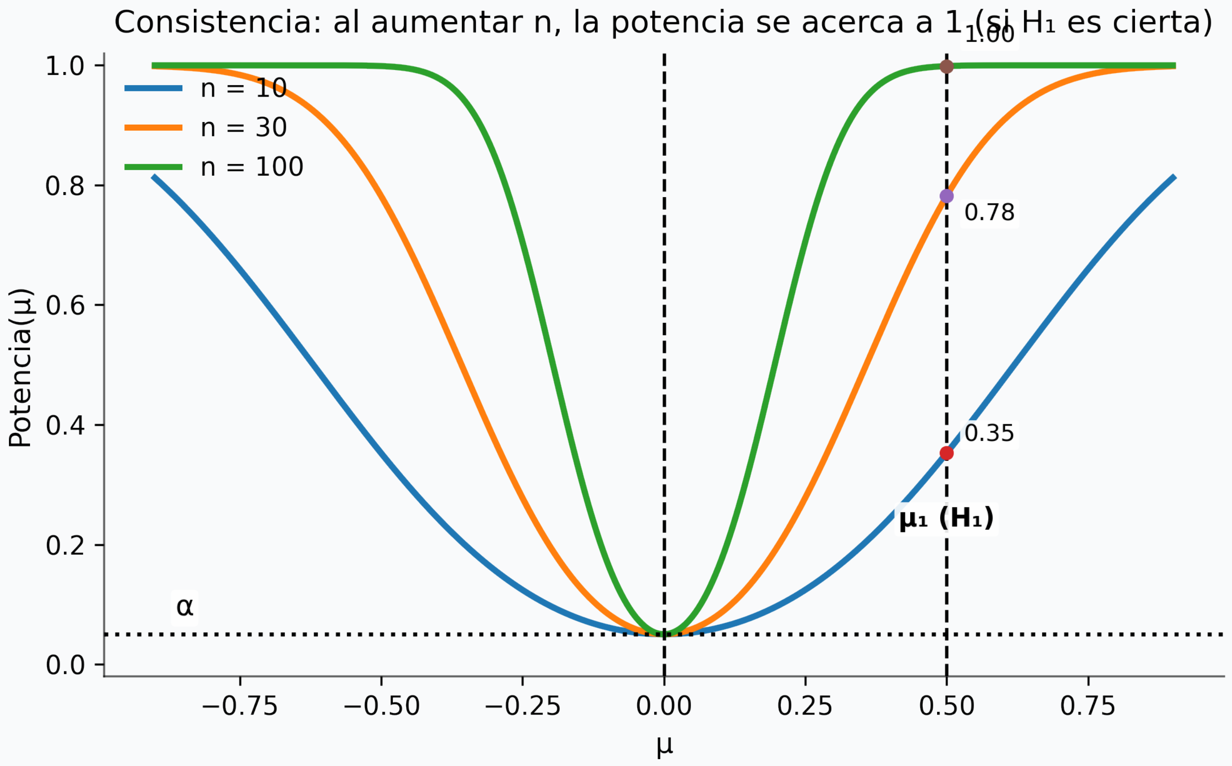
Si **H_1 es cierta**, entonces al crecer n:

$$P(rechazar\ H_0|H_1\ cierta)\ \underset{n}{\rightarrow} 1$$

Interpretación docente

Con más información (muestras grandes), el contraste "acaba detectando" cualquier desviación real respecto a H_0.

Nota: La consistencia no garantiza buen rendimiento con tamaños muestrales pequeños: describe lo que ocurre cuando el tamaño muestral aumenta, haciendo que la potencia se aproxime a 1 si H_1 es cierta.



8.4 Contrastes uniformemente más potentes (idea)

PLUS

Idea

Entre todos los contrastes con el mismo nivel de significación α, a veces uno tiene mayor potencia que los demás para todos los valores de la alternativa.

Definición (idea)

Un contraste es **uniformemente más potente si**,

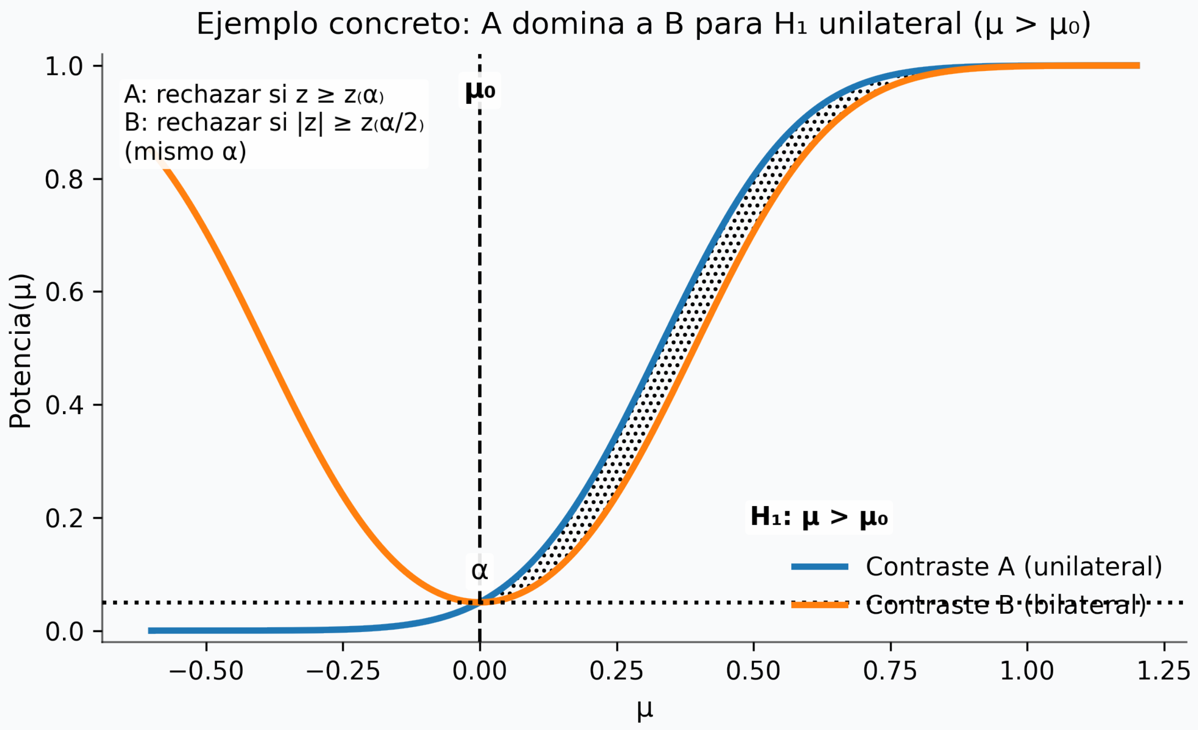
- **para todo θ en H₁**: $Potencia_A(\theta) \geq Potencia_B(\theta)$
- y además, es **estricta para algún θ** (mejora en algún punto de H_1).

Interpretación docente

Si existe, es el "mejor" contraste en el sentido de que domina a los demás en potencia sin aumentar α.

Nota

No siempre existe un contraste uniformemente más potente para alternativas compuestas; por eso este criterio se introduce como ideal y **no como regla universal**.



8.5 Contraste razón de verosimilitud (idea)

PLUS

Idea

Se basa en **comparar la verosimilitud por cociente** de los datos bajo H_0 y bajo H_1, **y decidir a favor de la hipótesis que hace más verosímil la muestra** (según esa comparación).

Razón de verosimilitudes

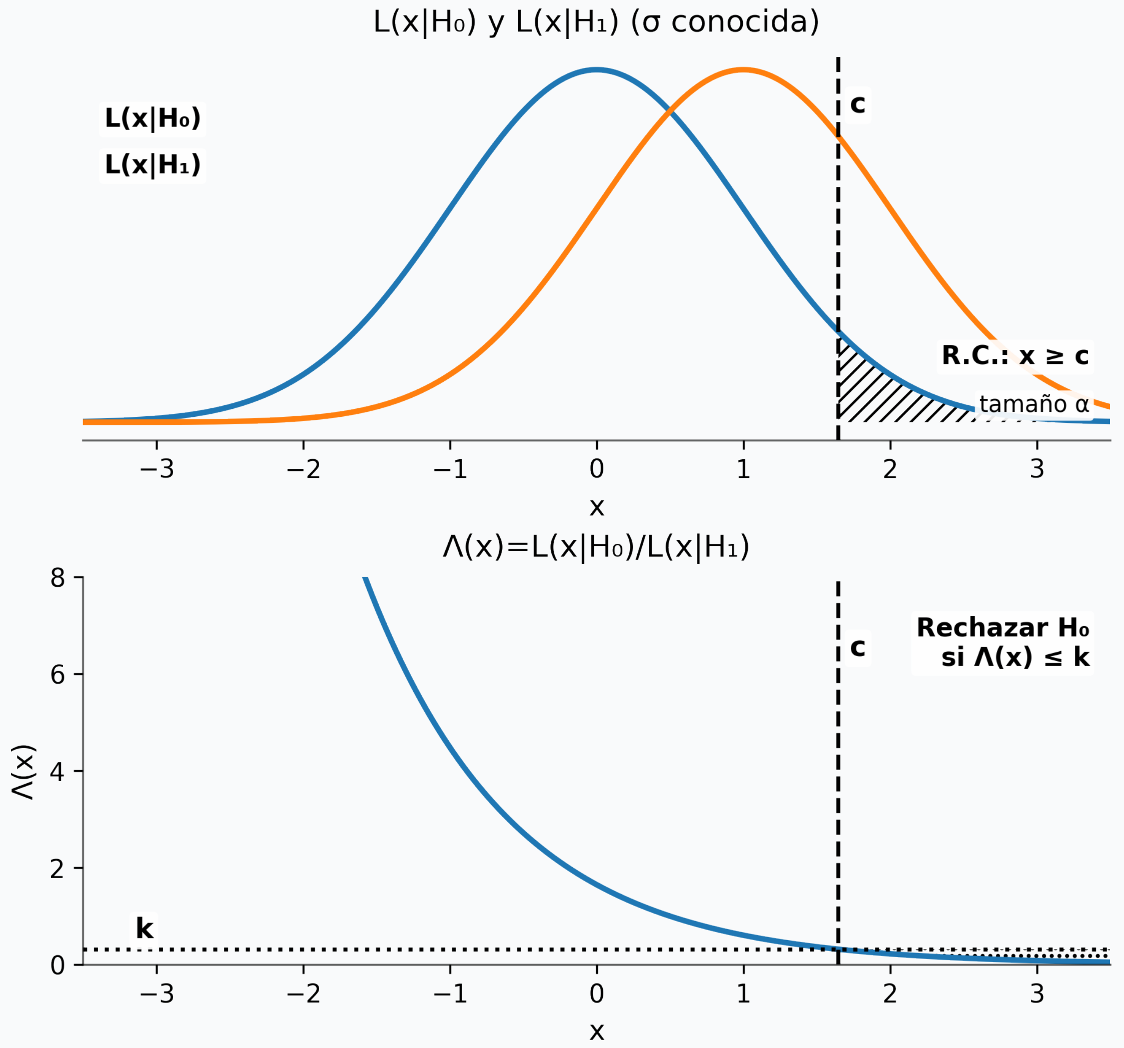
$$\Lambda \;=\; L(muestra \mid H_0) \;/\; L(muestra \mid H_1)$$

Regla general (intuición)

- Si Λ es grande → los datos favorecen H_0 → no rechazamos H_0.
- Si Λ es pequeño → los datos favorecen H_1 → rechazamos H_0.

Comentario docente

En muchos modelos, este criterio lleva a reglas de decisión “naturales” (por ejemplo, basadas en estadísticos que crecen cuando los datos se alejan de H_0).



8.6 Test de Wald (panorámica)

PLUS

Idea

Contrasta H_0: $\theta = \theta_0$ midiendo cuán lejos está el estimador $\hat{\theta}$ del valor nulo, en unidades de su desviación típica (DT).

Forma típica (esquema)

$$W = (\hat{\theta} - \theta_0) \,/\, DT(\hat{\theta})$$

$DT(\hat{\theta})$ **se estima a partir del modelo y de sus supuestos**; si estos cambian (heterocedasticidad, autocorrelación, etc.), se emplean estimaciones alternativas (p. ej., robustas) de esa desviación típica.

Regla de decisión (idea)

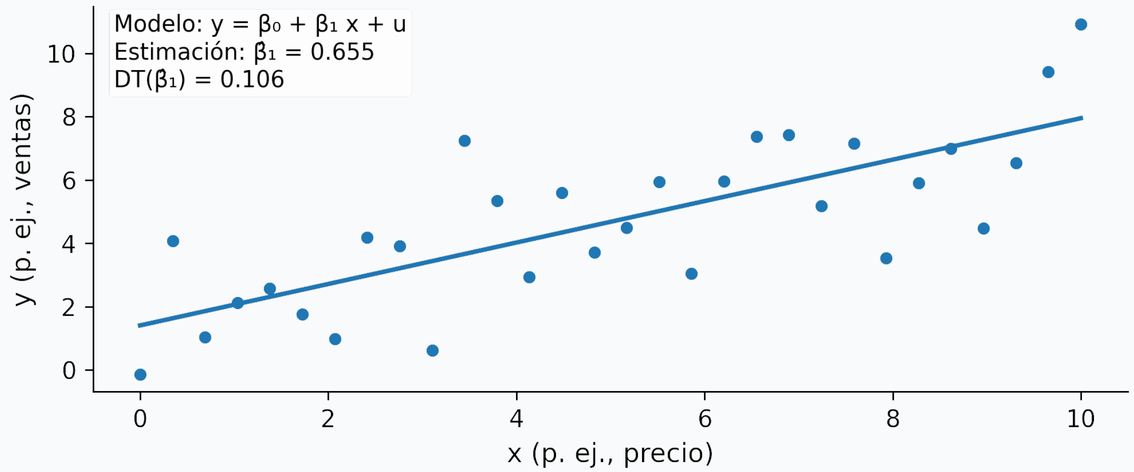
Rechazamos H_0 si $|W|$ es suficientemente grande (según la distribución aproximada bajo H_0).

Comentario docente

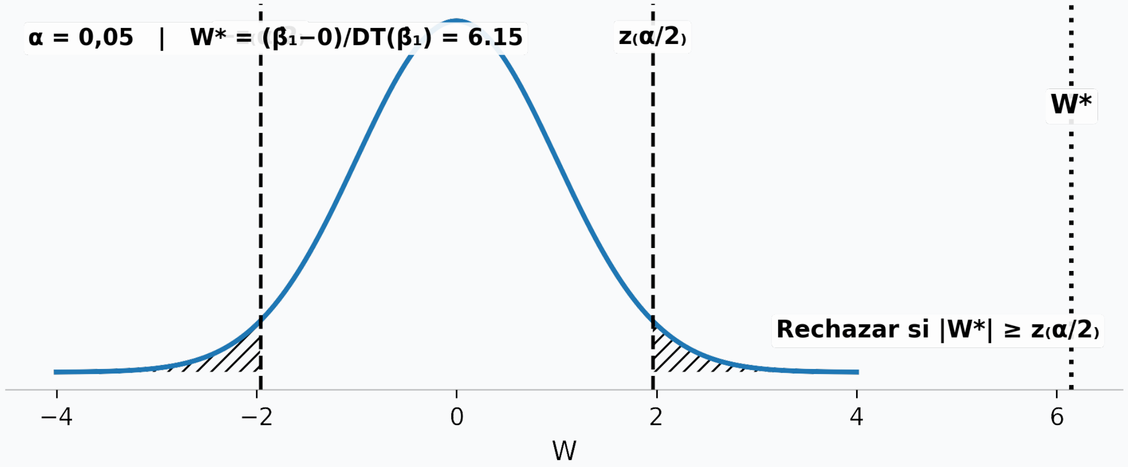
Es un contraste muy usado en modelos econométricos: "estimación + contraste" en una sola expresión.

Nota: Aquí lo dejamos como panorama: en la práctica, $DT(\hat{\theta})$ suele venir del modelo o del software.

1) Ejemplo: regresión lineal (y sobre x)



2) Test de Wald: H_0: $\beta_1 = 0$ (aprox. N(0,1))



8.7 Test de multiplicadores de Lagrange (LM / Score) — panorámica

Idea

Contrasta H_0 evaluando si, en el valor impuesto por H_0, una pequeña desviación hacia H_1 "mejora" mucho el ajuste del modelo.

Estadístico LM (forma general)

$$LM = S(\hat{\theta}_0)^{\mathrm{T}} \cdot I(\hat{\theta}_0)^{-1} \cdot S(\hat{\theta}_0)$$

donde:

- $\hat{\theta}_0$ es el **estimador bajo H_0** (modelo restringido)
- $S(\hat{\theta}_0)$ es el **vector score** (derivadas de log-verosimilitud) evaluado en $\hat{\theta}_0$
- $I(\hat{\theta}_0)$ es la **matriz de información** (o estimación equivalente) evaluada en $\hat{\theta}_0$

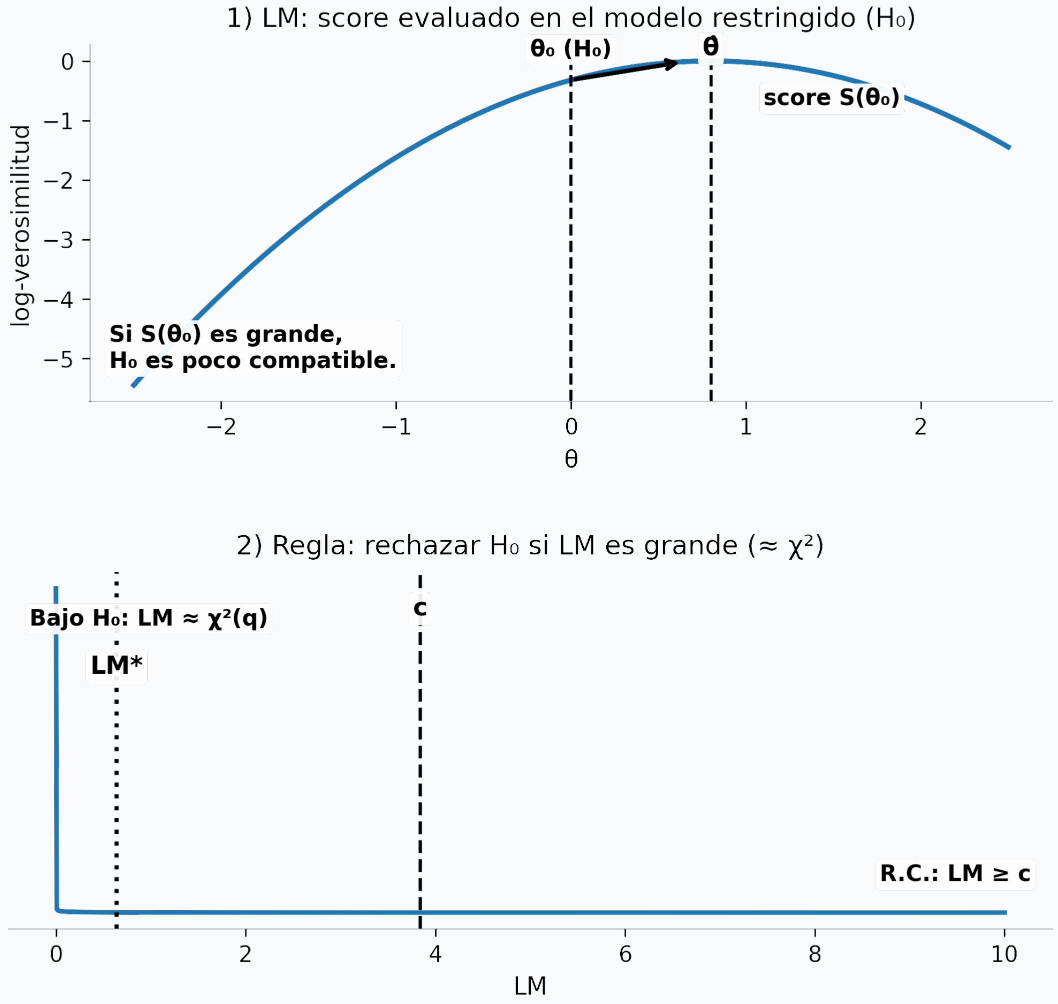
Bajo H_0 (en condiciones regulares): $\boldsymbol{LM} \sim \chi^2_q$ (aprox.), con q restricciones.

Regla de decisión (idea)

- Rechazamos H_0 si LM es suficientemente grande.

Comentario docente

Ventaja práctica: **solo necesita estimar el modelo bajo H_0** (modelo restringido).



8.8 Test rápido (Wald / LR / LM)

CORE

1. **¿Qué contraste se basa en estimar el modelo restringido (bajo H_0) y mirar el score?**
   a) Wald
   b) Razón de verosimilitud (LR)
   c) Multiplicadores de Lagrange (LM)
   d) Ninguno
2. **¿Qué contraste se basa en comparar L(muestra|H_0) con L(muestra|H_1)?**
   a) Wald
   b) Razón de verosimilitud (LR)
   c) Multiplicadores de Lagrange (LM)
   d) t de Student
3. **¿Qué contraste tiene forma "estimación / desviación típica estimada"?**
   a) Wald
   b) Razón de verosimilitud (LR)
   c) Multiplicadores de Lagrange (LM)
   d) χ^2 de varianza
4. **En términos generales, en muestras grandes, Wald, Razón de verosimilitud (LR) y Multiplicadores de Lagrange (LM):**
   a) Siempre dan exactamente lo mismo
   b) Son asintóticamente equivalentes (decisiones similares)
   c) No tienen relación entre sí
   d) Solo coinciden si el contraste es unilateral

8.8 Test rápido (Wald / LR / LM)

CORE

1. **¿Qué contraste se basa en estimar el modelo restringido (bajo H_0) y mirar el score?**
   a) Wald
   b) Razón de verosimilitud (LR)
   c) Multiplicadores de Lagrange (LM) ✅
   d) Ninguno
2. **¿Qué contraste se basa en comparar L(muestra|H_0) con L(muestra|H_1)?**
   a) Wald
   b) Razón de verosimilitud (LR) ✅
   c) Multiplicadores de Lagrange (LM)
   d) t de Student
3. **¿Qué contraste tiene forma “estimación / desviación típica estimada”?**
   a) Wald ✅
   b) Razón de verosimilitud (LR)
   c) Multiplicadores de Lagrange (LM)
   d) χ^2 de varianza
4. **En términos generales, en muestras grandes, Wald, Razón de verosimilitud (LR) y Multiplicadores de Lagrange (LM):**
   a) Siempre dan exactamente lo mismo
   b) Son asintóticamente equivalentes (decisiones similares) ✅
   c) No tienen relación entre sí
   d) Solo coinciden si el contraste es unilateral

9. Cierre docente

9.1 Mapa de decisión final (qué contraste usar)

CORE

1. ¿Qué parámetro contrastas?

- Media μ
- Varianza / desviación típica σ (o σ^2)
- Diferencia de medias $\mu_x - \mu_y$
- Proporción π
- Diferencia de proporciones $\pi_1 - \pi_2$
- Igualdad de varianzas $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$

2. ¿ Una población o dos ?

- Una muestra
- Dos muestras independientes

3. ¿Qué información tienes?

- σ conocida → usar z (medias)
- σ desconocida → usar t (medias)
- Normalidad (para χ^2 y F) o aproximación justificada

4. Contraste típico (resumen)

- μ, σ conocida → z
- μ, σ desconocida → $t(n-1)$
- σ (o σ^2) en normal → $\chi^2(n-1)$
- $\mu_x-\mu_y$, σ conocidas → z
- $\mu_x-\mu_y$, σ desconocidas e iguales → $t(n+m-2)$
- $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ → $F(n-1, m-1)$
- π (muestra grande) → z (aprox.)
- $\pi_1-\pi_2$ (muestras grandes, H_0: $\pi_1=\pi_2$) → z pooled (aprox.)

5.Después: Fijar α → Calcular estadístico → Aplicar Regla (• Valor crítico • P-valor) → Interpretar en contexto

9.2 Checklist final (resolución en examen)

CORE

Datos y supuestos

- ¿Muestra(s) aleatoria(s)? ¿Independencia?
- ¿Normalidad / σ conocida / tamaño muestral grande? (según el contraste)

Planteamiento

- Definir H_0 y H_1 (unilateral / bilateral)
- Identificar el parámetro (μ, σ, π, diferencias)

Nivel de significación

- Fijar α (y repartir $\alpha/2$ si es bilateral)

Estadístico

- Escribir T y calcular el valor observado T* con los datos

Regla de decisión

- Valor crítico (R.C./R.A.) o p-valor
- Decidir: rechazamos H_0 / no rechazamos H_0

Interpretación en contexto

- Con α = …, la muestra (no) aporta evidencia suficiente para…
- Cuidar el “sentido” (>, <, $\neq$) y la unidad del problema.

9.3 Errores típicos (y cómo evitarlos)

CORE

Decisión y lenguaje

- Decir "no rechazamos H_0" (no "aceptamos H_0").
- "No rechazar" no prueba H_0: indica falta de evidencia con ese α.

Colas y valores críticos

- **Unilateral**: toda α en una cola. **Bilateral**: α/2 en cada cola.
- No mezclar z_α con $z_{\alpha/2}$.

p-valor

- El p-valor se calcula suponiendo H_0 cierta (no es $P(H_0$ verdadera$)$).
- p-valor pequeño no implica necesariamente efecto grande (depende de n).

Elección del contraste

- No usar t si σ es conocida (usar z).
- En varianzas: recordar que χ^2 y F no son simétricas.

Notación de la asignatura

- N(μ,σ) con σ = desviación típica.
- $\bar{x}$ en minúscula; S^2 (divisor n) y S_1^2 (divisor n−1).
- Intervalos en formato [a ; b] y coma decimal.

9.4 Puente al siguiente tema (no paramétricos)

CORE

Idea general

Los contrastes paramétricos (z, t, χ^2, F) se apoyan en supuestos sobre la distribución (por ejemplo, normalidad) o en aproximaciones de grandes muestras.

Aparecen los no paramétricos cuando:

- no queremos suponer una **forma concreta de distribución**, o
- trabajamos con **variables ordinales/rangos**, o
- la **normalidad no es razonable y el tamaño muestral no permite una aproximación fiable**.

Qué veremos después (orientación)

Contrastaremos hipótesis usando procedimientos “distribución libre” (en particular, basados en χ^2) para problemas como:

- **bondad de ajuste**,
- **independencia** en tablas de contingencia.

Nota: **La lógica H_0/H_1, α, p-valor y decisión se mantiene**: cambia el estadístico y su distribución bajo H_0.

ANEXO

Recursos

Bibliografía:

- **Ruiz-Maya, L., Martín-Pliego López, F. J. (3.ª ed.). Fundamentos de Inferencia Estadística. Thompson–Paraninfo.**
- **StatsCalculators — Statistical Tables:**
  - Normal estándar, t de Student, Chi-cuadrado y F de Fisher–Snedecor
  - https://www.statscalculators.com/resources/statistical-tables?utm_source=chatgpt.com

  (recurso externo; enlace informativo)

Atribuciones y transparencia:

- **Gráficas** de este anexo: generadas con Python (SciPy/Matplotlib) con apoyo de ChatGPT.
- **Imágenes externas**: cuando se incluyen, se usan bajo licencia CC-BY / CC-BY-SA, citadas individualmente.